

## АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ НА ПОВЕДЕНИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Илюхин А.А., Шретер С.А.

ФГБОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова»,  
Таганрог, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru, sergshre@yandex.ru

Основная идея используемого в представленной работе метода построения решения нелинейной задачи теории упругих стержней состоит в сведении исходного уравнения равновесия Кирхгофа к системе из двух уравнений с соответствующей функцией гамильтонова типа. Функция Гамильтона в последующем подвергается нормализации в определенном числе членов. Подобное представление уравнения равновесия упругого стержня в гамильтоновой форме позволяет привлечь для решения задач статики гибких стержней аппарат гамильтоновой механики. Специфика задач механики гибких стержней состоит в том, что граничные условия в них задаются в нескольких точках оси стержня. И при аналитическом построении приближенного решения приходится вычислять постоянные интегрирования из граничных условий. А для этой цели полезно иметь явный вид обратного преобразования Биркгофа.

**Ключевые слова:** гамильтонов подход, преобразование Биркгофа, изгиб стержня, математическая модель, аэродинамические силы

## ANALYSIS OF THE EFFECTS ON THE BEHAVIOR OF THE AERODYNAMIC FORCES OF HYBRID SYSTEM

Ilyukhin A.A., Shreter S.A.

Anton Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Taganrog,  
e-mail: aleilyukhin@yandex.ru, sergshre@yandex.ru

The basic idea used in the present paper the method of constructing solutions of nonlinear problems in the theory of elastic rods is to reduce the original equations of equilibrium to the Kirchhoff system of two equations with the corresponding function of the Hamiltonian type. The Hamiltonian in the subsequent normalization of the schem is exposed in a certain number of members. Such a representation of the equilibrium equations of an elastic rod in a Hamiltonian form allows you to be involved in solving problems of statics of flexible rods apparatus of Hamiltonian mechanics. Specificity problems in the mechanics of flexible rods with-standing the fact that the boundary conditions are given at several points in the axis of the rod. And with the analytic approximate solution has to calculate the constants of integration from the boundary conditions. And for this purpose is useful to have an explicit form of the inverse transform of Birkhoff.

**Keywords:** Hamiltonian approach, Birkhoff transformation, bending the rod, the mathematical model, the aerodynamic forces

Рассмотрим эксперимент по определению зависимости конечных перемещений точек упругого стержня от аэродинамических сил. К одному из концов стержня жестко прикреплена пластинка. Широко используемая в строительной механике и в курсах сопротивления материалов линейная теория упругого изгиба стержней, которая базируется на предположении о малости перемещений при деформации, дает линейную зависимость прогиба от внешних сил. Однако в случае больших перемещений при деформации линейная теория не позволяет адекватно физической задаче определять искомые зависимости. В технике встречаются конструкции, в которых стержень или тонкая полоска сильно изгибаются при работе материала в пределах упругости. Наряду с рассматриваемой задачей примерами таких конструкций могут служить различного рода плоские или ленточные пружины, механические датчики нелинейных зависимостей. В связи с этим весьма актуальной является задача определения зависимости больших перемещений при деформации стержня от внешних сил.

**Цель работы:** решив уравнение равновесия конструкции, установить зависимость между аэродинамическими силами и углом поворота пластинки (текущим углом атаки  $\alpha_r$ ), и тем самым, построить математическую модель эксперимента в аэродинамической трубе.

**Постановка задачи (рис. 1).** Рассмотрим задачу об изгибе потоком воздуха упругого однородного стержня, жестко защемленного нижним концом, к верхнему концу которого жестко прикреплена абсолютно твердая пластинка. Предполагается, что поток воздействует только на пластинку, изгиб стержня происходит в одной плоскости. Силу воздействия  $\vec{R}$  потока на пластинку представим в виде суммы двух векторов:

$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{P},$$

где  $\vec{S}$  – сила сопротивления,  $\vec{P}$  – подъемная сила,  $\vec{S} \parallel \vec{V}$ ,  $\vec{P} \perp \vec{V}$ . Для аэродинамических сил возьмем зависимости:

$$\vec{S} = s(\alpha) V \vec{V} \rho / 2, \quad \vec{P} = p(\alpha) V (\vec{i} \times \vec{V}) \rho / 2,$$

где  $\rho$  – плотность воздуха;  $\alpha$  – угол атаки,  $\vec{i}$ ,  $\vec{i} \perp \vec{V}$  – единичный вектор, лежащий

в плоскости пластинки. Функции  $s(\alpha), p(\alpha)$  – коэффициенты аэродинамических сил, зависят от формы и размеров пластинки и определяются экспериментально [5]. К стержню кроме силы  $\bar{R}$  приложен момент:

$$M = \frac{\rho}{2} d(\alpha) V^2 (p \cos(\alpha) + s \sin(\alpha)),$$

где  $d(\alpha)$  – расстояние от центра давления до точки крепления пластинки и стержня. Тогда уравнение равновесия Кирхгофа представленной системы примет вид:

$$B \frac{d^2 \theta}{dl^2} + \frac{\rho}{2} s V^2 \sin \theta + \frac{\rho}{2} p V^2 \cos \theta = 0. (1)$$

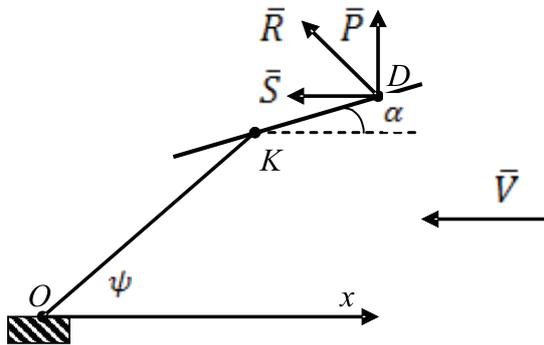


Рис. 1. Постановка задачи

**Исследование равновесия тела на упругом стержне в потоке воздуха.** Понизим порядок уравнения равновесия и выразим интеграл  $l(\theta)$ .

$$B \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 - \rho s V^2 \cos \theta + \rho p V^2 \sin \theta - C = 0; (2)$$

$$l = \sqrt{B} \int_{\psi}^{\theta} (\rho s V^2 \cos \theta - \rho p V^2 \sin \theta + C)^{-1/2} d\theta, (3)$$

где  $C$  – постоянная, определяемая начальными условиями.

Потребуем, чтобы точка перегиба совпадала с точкой крепления  $O$ . Это будет разделяющий случай между различными выпуклостями стержня. Тогда при  $l=0$ , кроме условия  $\theta = \psi$ , появляется еще одно граничное условие  $d\theta/dl = 0$ . Из (2) следует

$$C = \rho p V^2 \sin \psi - \rho s V^2 \cos \psi. (4)$$

Преобразуем  $l$  в выражении (3), одновременно сделав замену

$$z = \operatorname{tg} \theta / 2 (z_0 = \operatorname{tg} \psi / 2).$$

$$l = 2\sqrt{B} \int_{z_0}^z \left[ (1+z^2) (\rho s V^2 (1-z^2) - \rho p V^2 2z + C(1+z^2)) \right]^{-1/2} dz. (5)$$

Запишем дискриминант выражения, стоящего в квадратных скобках (5), и подставим вместо  $C$  его значение (4):

$$D = \rho^2 V^4 [s \sin \psi + p \cos \psi]^2.$$

Рассмотрим ситуацию, когда  $D$  обращается в нуль. Это будет, если

$$s V \sin \psi + p V \cos \psi = 0.$$

Условие  $V > 0$  означает, либо,  $p(\alpha_T) > 0$  и  $\operatorname{ctg} \psi < 0$ , либо  $p(\alpha_T) < 0$  и  $\operatorname{ctg} \psi > 0$ . Могут возникнуть следующие случаи:

1. Если  $0 < \alpha_T < 90^\circ$ , то  $p(\alpha_T) > 0$ . Следовательно  $90^\circ < \psi < 180^\circ$ ;
2. Если  $90^\circ < \alpha_T < 180^\circ$ , то  $p(\alpha_T) < 0$ . Следовательно  $0^\circ < \psi < 90^\circ$ ;
3. Если  $\alpha_T = 90^\circ, 180^\circ$ , то  $p(\alpha_T) = 0$ . Следовательно  $\psi = 0, 180^\circ$ .

Выразив  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  через  $\operatorname{tg}(\theta/2)$  и подставив в выражении (5), получим интеграл, который при  $D = 0$  примет вид:

$$l = 2\sqrt{B} \int_{\psi}^{\theta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \left[ \rho \frac{p^2(\alpha_T)}{s^2(\alpha_T)} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right)^2 \right]^{-1/2} d\theta. (6)$$

Вычислив интеграл, входящий в формулу (6), получим зависимость  $l(\theta)$ :

$$l = W \left[ \ln \left| \frac{\cos \left( \frac{\theta - \psi}{2} \right) - 1}{\cos \left( \frac{\theta - \psi}{2} \right) + 1} \right| \right]_{\psi}^{\theta} = W \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\theta - \psi}{2} \Big|_{\psi}^{\theta} = W \left\{ \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\theta - \psi}{2} + \infty \right\},$$

$$\text{где } W = 2 \cdot \text{sign} \sin \left( \frac{\theta - \Psi}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{Bs^2(\alpha_r)}{\rho p^2(\alpha_r)}} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \text{tg}^2 \frac{\Psi}{2}} - \frac{1}{4} \text{tg}^2 \frac{\Psi}{2} \right)^{-1/2} \cdot \cos \left( \frac{\Psi}{2} \right).$$

Полученный интеграл – расходящийся интеграл, следовательно, случай, когда точка перегиба будет находиться в точке крепления  $O$  возникнуть не может.

*Гамильтонов подход.* Для преобразования уравнения (1) к системе двух уравнений Гамильтона поступим формально: выберем обобщенную координату  $\theta$  (в качестве  $\theta$

возьмем угол  $\theta(l)$  наклона касательной оси стержня к оси  $Ox$ ,  $Ox \parallel \vec{V}$ ), укажем сопряженной координате импульс  $p_\theta$  и приведем соответствующую такому выбору функцию Гамильтона. Получим систему двух уравнений Гамильтона с соответствующей функцией  $H$  в виде

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{dH}{dp_\theta} = \frac{1}{B} p_\theta; \quad \frac{dp_\theta}{dl} = \frac{dH}{d\theta} = -\frac{1}{2} \rho s V^2 \sin \theta - \frac{1}{2} \rho p V^2 \cos \theta; \quad (7)$$

$$H = \frac{1}{2B} p_\theta^2 - \frac{1}{2} \rho s V^2 \cos \theta + \frac{1}{2} \rho p V^2 \sin \theta. \quad (8)$$

Канонической заменой  $\theta + \delta$ ,  $p_\zeta = p_\theta$  из системы (7) получим:

$$\frac{d\zeta}{dl} = \frac{p_\zeta}{B}, \quad \frac{dp_\zeta}{dl} - \frac{1}{2} R \sin \zeta, \quad (9)$$

где  $R = \rho V^2 \sqrt{p^2 + s^2}$ .

А функция Гамильтона (8) в канонических переменных будет иметь вид:

$$H = \frac{p_\zeta^2}{2B} - \frac{1}{2} R \cos \zeta.$$

$$\bar{H} = -i \left[ pq - \frac{1}{96} (p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4) \right]. \quad (10)$$

При отсутствии соответствующих резонансов в системе (9), функцию Гамильтона  $\bar{H}$  (10) каноническим преобразованием

$$p = u + \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial v}, \quad q = v - \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial u}; \quad S_4 = S_{04}v^4 + S_{13}uv^3 + S_{22}u^2v^2 + S_{31}u^3v + S_{40}u^4.$$

Специальным выбором коэффициентов порождающей функции приводим функцию Гамильтона (10) к нормальному виду в переменных  $u$  и  $v$

$$H_* = -i \left[ uv - \frac{1}{16} u^2 v^2 \right]. \quad (11)$$

Система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (11) допускает общий интеграл  $r = uv = \text{const}$ , что дает воз-

ведем к нормальной форме [1, 2]. В качестве канонического выберем преобразование Биркгофа с соответствующей порождающей функцией

можность представить ее точное решение в явном виде

$$v = (a + ib) e^{iml},$$

$$v = (a - ib) e^{-iml},$$

где  $m = i \frac{\partial H_*}{\partial (uv)} = \text{const}$ .

В результате получаем зависимость  $P'_\zeta$  и  $\zeta'$  от дуговой координаты  $l$ :

$$P'_\zeta = \left( a - \frac{1}{16} (a^2 + b^2) a \right) \cos(ml) + \left( -b + \frac{1}{16} (a^2 + b^2) b \right) \sin(ml) + \frac{1}{32} a (a^2 - 3b^2) \cos(3ml) + \frac{1}{32} b (b^2 - 3a^2) \sin(3ml);$$

$$\zeta' = \left( -b - \frac{1}{16}(a^2 + b^2)b \right) \cos(ml) + \left( -a - \frac{1}{16}(a^2 + b^2)a \right) \sin(ml) + \frac{1}{96}b(b^2 - 3a^2) \cos(3ml) + \frac{1}{96}a(a^2 - 3b^2) \sin(3ml).$$

Откуда находим решение поставленной задачи:

$$\alpha_T = \alpha_0 + \sqrt{2}\zeta'(L) - \delta - \psi.$$

Для определения постоянных интегрирования  $a$  и  $b$  воспользуемся граничными условиями, перепишем граничные условия в новых переменных  $p_\zeta$  и  $\zeta'$ .

$$\zeta' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\psi + \delta),$$

$$p'_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d}{L} Y \sin(\alpha_0 - \psi + \sqrt{2}\zeta'),$$

где  $Y = L\sqrt{\frac{R}{2B}}$ .

Заменив уравнения системы для  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  приближенными и воспользовавшись граничными условиями, будем иметь нелинейную систему уравнений для нахождения  $a$  и  $b$ .

$$a - ib = p'_\zeta + i\zeta' - \frac{1}{96}((p'_\zeta - i\zeta')^3 - 6(p'_\zeta + i\zeta')(p'_\zeta - i\zeta')^2 + 2(p'_\zeta + i\zeta')^3);$$

$$a + ib = p'_\zeta - i\zeta' + \frac{1}{96}(-2(p'_\zeta + i\zeta')^3 + 6(p'_\zeta + i\zeta')^2(p'_\zeta - i\zeta') - (p'_\zeta + i\zeta')^3).$$

В том случае, когда  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  не заданы одновременно в одной точке, необходимо решать нелинейную систему. Ее предлагается решать методом последовательных приближений [4]. Как показали вычисления в этом случае, каждый шаг итерации уточ-

**Обратное преобразование Биркгофа.** Построенное решение задачи зависит от постоянных интегрирования  $a$  и  $b$ , и при подстановке граничных значений дает систему нелинейных алгебраических уравнений. Однако, когда известны значения исходных переменных при  $l = 0$ , нет необходимости решать нелинейную систему. Явный вид  $a$  и  $b$  можно получить, используя обратное преобразование Биркгофа [2, 4]:

$$u = p - \frac{1}{96}(q^3 - 6pq^2 + 2p^3),$$

$$v = q + \frac{1}{96}(-2q^3 + 6p^2q - p^3).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим систему для нахождения неизвестных постоянных, где  $p_\zeta$  и  $\zeta'$  вычисляются при  $l = 0$ :

няет значение искомого угла на один знак после запятой.

**Представление решения в виде отрезка ряда по скорости.** Запишем уравнение равновесия (1) относительно изменения угла наклона касательной к оси стержня  $v = \theta - \psi$

$$B \frac{d^2v}{dl^2} + \frac{\rho}{2} s V^2 \sin(\psi + v) + \frac{\rho}{2} p V^2 \cos(\psi + v) = 0. \quad (12)$$

Граничные условия в задаче будут:

при  $l = 0: v = 0;$   
 при  $l = L: B \frac{dv}{dl} \Big|_k = M. \quad (13)$

Предположим, что решение задачи (12), (13) представимо в виде степенного ряда по  $V$ :

$$v(l, V) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(l) V^n. \quad (14)$$

Найдем зависимость угла атаки от скорости набегающего потока:

$$\alpha_T = \alpha_0 + v_k.$$

Заменим уравнение (12) приближенным, и, подставив в (14), после группиров-

ки коэффициентов со степенями  $V$  получим уравнение:

$$\frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 q_j V^j = 0,$$

где коэффициенты  $q_j$ :

$$V: q_1 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2\mu_1}{dl^2} = 0; \quad (15)$$

$$V^2: q_2 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2\mu_2}{dl^2} + (s \sin \psi + p \cos \psi) = 0;$$

$$V^3: q_3 = \frac{2B}{\rho} \frac{d^2\mu_3}{dl^2} + (s \sin \psi - p \cos \psi) \mu_1 = 0.$$

Граничные условия к полученным дифференциальным уравнениям (15) примут вид

$$V : \frac{d\mu_1}{dl} = 0;$$

при  $l = 0$ :  $\mu_n = 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ ; при  $l = L$ :

$$V^2 : \frac{d\mu_2}{dl} = \frac{\rho}{2B} d(s \sin(\alpha_0) + p \cos(\alpha_0)); \quad (16)$$

$$V^3 : \frac{d\mu_3}{dl} = -\frac{\rho}{2B} d(p \sin(\alpha_0) + s \cos(\alpha_0))\mu_1.$$

Имея дифференциальные уравнения второго порядка (15) и два граничных условия (16) на каждое из уравнений, можем найти коэффициенты  $\mu_n$  ряда (14). Таким образом, найдена приближенная зависимость угла атаки от скорости набегающего потока:

$$\alpha_T = \alpha_0 + \mu_1 V + \mu_2 V^2 + \mu_3 V^3.$$

Стоит отметить, что поток воздуха оказывает стабилизирующее воздействие на пластинку, если с ростом скорости потока угол атаки уменьшается [3, 4].

### Закключение

После проведения необходимых вычислений было произведено сравнение решений  $\theta = \theta(l)$ , полученных разными методами. Все представленные графические зависимости  $\theta = \theta(l)$  были получены при следующих параметрах стержня, пластинки и потока:  $\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$ ;  $\psi = 45^\circ$ ;  $\alpha_0 = 30^\circ$ ;  $L = 0,3 \text{ м}$ ;  $d = 0,05 \text{ м}$ . Пластинка рассматривалась абсолютно твердая прямоугольной формы, с размерами  $0,1 \times 0,3 \text{ м}$  (большая сторона расположена вдоль потока). Стержень стальной, длиной  $L = 0,3 \text{ м}$ , с прямоугольным сечением  $0,006 \times 0,003 \text{ м}$ , меньшее из ребер сечения направлено по потоку.

На рис. 2 приведены графики решений  $\theta = \theta(l)$ , полученные при указанных скоростях набегающего потока. На графиках пунктирной линией указано решение, полученное с помощью гамильтонова подхода, сплошной линией – в виде отрезка ряда по скорости набегающего потока. Для выяснения, какой из приближенных методов адекватнее описывает поведение построенной модели, было проведено численное решение методом rkf45 (Рунге-Кутта-Фельберга 4–5 порядка). Оно обозначено на рисунках линией «точка-тире». Из рис. 2 видно, что при малых скоростях потока (до 40–50 м/с), расхождение решения, полученного с помощью гамильтонова подхода и численного решения методом rkf45, достаточно мало (порядка 0,5–1,0 градуса).

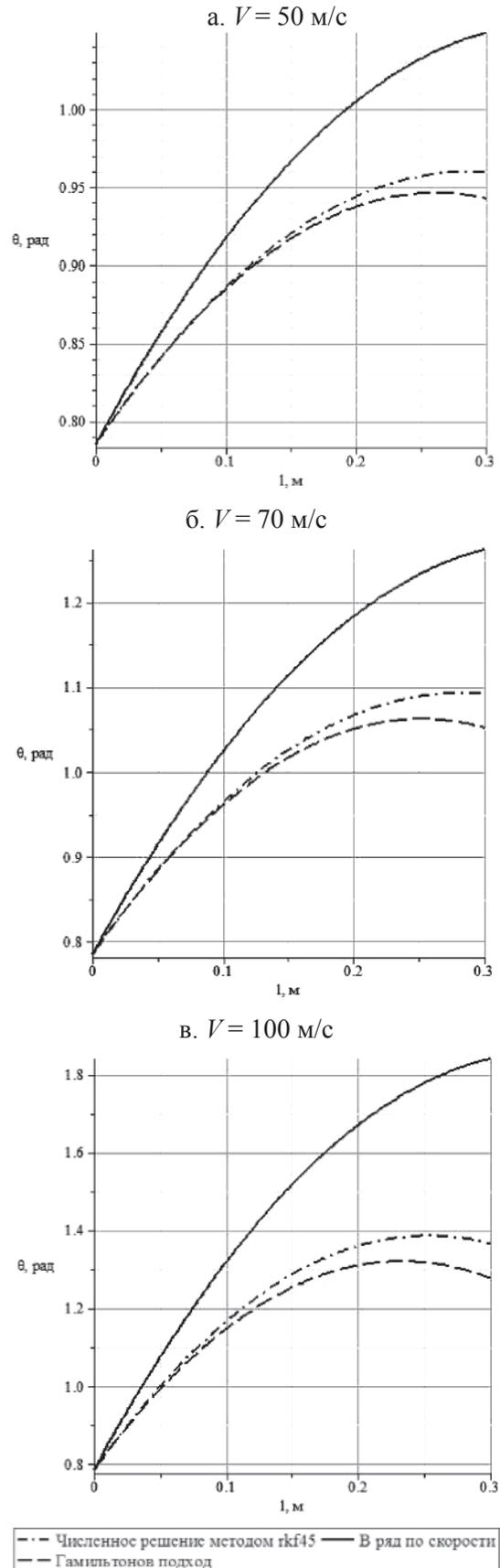


Рис. 2. Сравнение решений  $\theta = \theta(l)$ , полученных разными методами

С ростом же скорости потока решения сильнее отклоняться друг от друга и при скорости  $V = 90 \dots 100$  м/с разница решения  $\theta(L)$  (на верхнем конце стержня) достигает уже 5–6 градусов. Это расхождение можно объяснить недостаточным количеством членов в разложении функции Гамильтона. На рисунках также продемонстрировано сильное расхождение, как при малых скоростях, так и при больших, решений, полученных с помощью отрезка ряда по скорости набегающего потока, с решениями гамильтоновым и численным методом. Это расхождение происходит из-за специфики самого метода «разложения в ряд по скорости», который при росте скорости очень быстро отклоняется от «истинного» решения. Из всего вышесказанного следует, что гамильтонов подход дает достаточно близкое к «истинному» решение, но при математическом моделировании заставляет каждое решение получать с помощью последовательных итераций, что не всегда удобно для реализации. Второй подход, через представление решения в виде отрезка ряда по скорости, дает аналитические формулы для всех решений, однако его применение целесообразно лишь при малых скоростях потока.

Данная статья написана при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.1885.2011, тема: «Математическое моделирование статики и динамики гибридных механических систем и идентификация их параметров», научный руководитель – Илюхин Александр Алексеевич.

### Список литературы

1. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г.В. Горг, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко. – Киев: Наукова думка, 1984. – 288 с.
2. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
3. Илюхин А.А., Ступко С.А. Приближенное решение задачи о равновесии пластинки на упругом стержне в потоке воздуха // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 242–246.
4. Илюхин А.А., Шретер С.А. Поведение пластинки на упругом стержне в аэродинамическом потоке // Научно-технический вестник Поволжья. – Казань, 2011. – Вып. 6. – С. 43–47.
5. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1986. – 86 с.

### References

1. Gorg G.V., Ilyukhin A.A., Kovalev A.M., Savchenko A.Ja. *Nelinejnij analiz povedenija mehanicheskikh sistem*. K.: Naukova dumka, 1984. 288 p.
2. Ilyukhin A.A. *Prostranstvennyye zadachi nelinejnoy teorii uprugih stержnej*. Kiev: Naukova dumka, 1979. 216 p.
3. Ilyukhin A.A., Stupko S.A. *Priblizhennoe reshenie zadachi o ravnovesii plastinki na uprugom stержne v potoke vozduha* – *Mehanika tverdogo tela*. 2000. Vyp.30. pp. 242–246.
4. Ilyukhin A.A., Shreter S.A. *Povedenie plastinki na uprugom stержne v ajerodinamicheskom potoke* – *Nauchno-tehnicheskij vestnik Povolzh'ja, Kazan'*, 2011. Vyp. 6. pp. 43–47.
5. Lokshin B.Ja., Privalov V.A., Samsonov V.A. *Vvedenie v zadachu o dvizhenii tela v soprotivljajuwejsja srede*. M.: Izd-vo Mos. Un-ta, 1986. 86 p.

### Рецензент –

Капустян С.Г., д.т.н., начальник отдела многопроцессорных информационно-управляющих систем, НИИ МВС имени академика А.В. Каляева, г. Таганрог.

Работа поступила в редакцию 19.03.2012.