

УДК 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ

Беневоленский С.Б., Кузнецов М.С.

ФГБОУ ВПО «МАТИ-Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского», Москва, e-mail: electron_inform@mail.ru

В данной статье описывается разработанный авторами метод расчета оптимального инвестиционного портфеля организации. Метод основан на предложенной математической модели инвестиционного портфеля. Проведены исследования математического моделирования оптимального инвестиционного портфеля ценных бумаг и разработан алгоритм решения задачи по формированию оптимального портфеля ценных бумаг организации с учётом следующие ограничений: заданная доходность портфеля, ограничение на максимальную и минимальную долю каждого актива в портфеле и ограничение на минимальную возможную покупку определенного лота. Произведены расчеты реальных показателей рынка акций для десяти компаний. Они сопровождаются экономическими выводами. Приведена графическая иллюстрация. На основе анализа могут быть даны практические рекомендации по формированию портфелей ценных бумаг.

Ключевые слова: оптимизация портфеля, ожидаемая доходность, квадратичное программирование

MATHEMATICAL MODELING OF AN OPTIMUM ORGANIZATION PORTFOLIO OF SECURITIES

Benevolenskiy S.B., Kuznetsov M.S.

Moscow state aviation technological university, Moscow, e-mail: electron_inform@mail.ru

This article describes developed by authors method for calculating the optimum organization portfolio of securities. The method is based on the proposed mathematical model of investment portfolio. Researches of mathematical modeling of an optimum organization portfolio of securities have been conducted and the algorithm for solving the problem of forming the optimal portfolio organizations with the account of following restrictions has been developed: given ROA, restrictions on the maximum and minimum sizes of investments into separate actives and minimum sizes of securities lots. Calculations of real market indicators for the ten companies have been made. These calculations are accompanied by economic conclusions. Graphical illustrations have been given. Based on the analysis can be given practical advices about a portfolio of securities formulation.

Keywords: portfolio optimization, ROA, quadratic programming

В условиях современной рыночной экономики одной из важнейших областей хозяйственной деятельности любой организации является инвестиционное планирование [4, 5].

В настоящее время проблема выбора оптимального сбалансированного портфеля становится особенно актуальной в связи с расширением инвестиционной активности банковского сектора, появлением паевых инвестиционных фондов, негосударственных пенсионных фондов и развитием экономики в целом [3].

В качестве прототипа была выбрана математическая модель с дополнительными ограничениями. Описанная модель позволяет сформировать инвестиционный портфель с ограничениями сверху, когда доля активов в общей структуре может составлять не более заданной величины [2]. Теория оптимального портфеля позволяет сформировать инвестиционный пакет финансовых активов, риск которого минимален по сравнению со всеми другими возможными портфелями, составленными из этих же активов. В качестве меры риска портфеля рассматривается стандартное отклонение (или дисперсия), характеризующее вероятность отклонения доходности портфеля от ожи-

даемого значения. Любой портфель характеризуется двумя параметрами: ожидаемой эффективностью и риском.

Известно, что закономерность нахождения оптимальной структуры портфеля имеет следующий вид [1]:

$$\min V_p = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_j x_j m_j = m_p; \\ \sum_j x_j = 1; \\ x_j \geq 0; \\ x_j \geq \delta_j, \end{cases}$$

где V_p – вариация эффективности портфеля; V_{ij} – ковариации эффективностей ценных бумаг i -го и j -го вида; m_j – математическое ожидание эффективности ценной бумаги j -го вида; m_p – заданная эффективность портфеля; x_j – доля капитала, вложенного в ценные бумаги j -го вида.

Условие неотрицательности переменных в данной постановке задачи является необходимым. Если $x_j > 0$, это означает ре-

комендацию вложить долю x_j наличного капитала в ценные бумаги вида j . Если $x_j < 0$, то это означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве $-x_j$.

Оценочная стоимость акций (облигаций, векселей) одного хозяйственного общества может составлять не более δ_j процентов стоимости активов.

В описанной модели не учитываются ограничения снизу, когда доля актива должна быть не менее заданной величины. Ограничения снизу выполняют две функции: могут быть наложены как условие на минимальную безрисковую часть актива и в то же время как условие минимальной цены лота того или иного актива.

Цель работы заключается в модификации описанной методики с помощью ввода дополнительных ограничений на минимальные значения долей активов в портфеле. Установление минимальной цены лота для каждого актива повышает точность мате-

матической модели, и, одновременно, разрешает использование модели при малых объемах инвестиционного портфеля, то есть в тех случаях, когда получаемые рекомендуемые доли активов меньше или равны минимально возможному объему покупки (неделимой цене лота).

Исходная задача представляет собой проблему квадратичного программирования, для решения которой разработаны специальные численные методы. Для проведения вычислительного эксперимента случайным образом было отобрано 10 видов ценных бумаг – акций и облигаций, которые котируются на российской фондовой бирже (табл. 1). Первичная обработка данных сводится к нахождению статистических характеристик портфеля – математического ожидания и среднего квадратического отклонения эффективности ценной бумаги и корреляционной матрицы между ними (табл. 2 и 3).

Таблица 1

Отобранные акции и облигации для вычислительного эксперимента

x_1	Акции обыкновенные Открытого акционерного общества «Газпром»	x_6	Облигации Открытого акционерного общества «АвтоВАЗ»
x_2	Акции обыкновенные Открытого акционерного общества «Нефтяная компания «ЛУКОЙЛ»»	x_7	Облигации Закрытого акционерного общества «Банк Русский Стандарт»
x_3	Акции обыкновенные Открытого акционерного общества «Новолипецкий металлургический комбинат»	x_8	Облигации Открытого акционерного общества «Газпром»
x_4	Акции обыкновенные Открытого акционерного общества «Горно-металлургическая компания «Норильский никель»»	x_9	Облигации Открытого акционерного общества энергетики и электрификации «Ленэнерго»
x_5	Акции обыкновенные Российского открытого акционерного общества энергетики и электрификации «ЕЭС России»	x_{10}	Облигации Открытого акционерного общества «Нефтяная компания «ЛУКОЙЛ»»

Таблица 2

Среднее значение (m_j) и стандартное отклонение (σ_j) доходности активов (в %)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
m_j	175,53	97,56	62,88	75,15	114,73	7,7	8,55	6,99	8,87	6,93
σ_j	65,51	48,93	19,66	25,47	22,76	0,46	0,29	0,22	0,61	0,12

Минимальное возможное значение риска для рассматриваемого экспериментального портфеля составляет 10% при отсутствии пороговых ограничений при условии, что доля каждой ценной бумаги не может быть более 35% (табл. 4). При малой эффективности в портфель включаются наиболее эффективные облигации в максимальных долях (пороговое ограничение 35%). Например, при заданной эффективности в 10% облигации составляют 98% всего портфеля инвестора.

Преобладающая доля облигаций в портфеле объясняется тем, что облигации традици-

онно считаются менее рисковым активом, чем акции. Акции корпораций являются не только менее надежными, но и более доходными ценными бумагами. Поэтому невысокая требуемая доходность обеспечивается в основном за счет облигаций, почти без добавления акций, при этом достигается минимизация риска.

С увеличением эффективности постепенно понижается доля облигаций в портфеле, и возрастает доля акций. Для максимальной эффективности (65%) следует вложить капитал в акции, которые обладают высокой доходностью, и в облигации с низким риском – x_3, x_4, x_5, x_7, x_9 .

Таблица 3

Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	4291,560	2628,432	888,669	1017,809	596,403	-15,067	-1,900	8,936	11,589	2,909
x_2	2628,432	2394,145	480,982	286,637	412,049	-6,752	-0,284	4,952	7,163	0,705
x_3	888,669	480,982	386,516	220,326	120,815	-3,075	0,627	2,076	4,317	0,731
x_4	1017,809	286,637	220,326	648,721	214,488	-3,515	-0,665	2,409	1,709	1,650
x_5	596,403	412,049	120,815	214,488	518,018	-1,675	1,914	2,203	1,250	0,956
x_6	-15,067	-7,878	-3,075	-3,515	-1,675	0,212	0,023	-0,018	-0,011	0,004
x_7	-1,900	-0,284	0,627	-0,665	1,914	0,023	0,084	0,014	0,007	0,006
x_8	8,936	4,952	2,076	2,409	2,203	-0,018	0,014	0,048	0,034	0,019
x_9	11,589	7,163	4,317	1,709	1,250	0,000	0,007	0,034	0,372	0,014
x_{10}	2,909	0,705	0,731	1,650	0,956	0,004	0,006	0,019	0,014	0,014

Таблица 4

Результаты решения задачи оптимального портфеля

#	m_p	V_p	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	10%	0,19	0,00%	0,00%	0,28%	0,37%	1,13%	35,00%	35,00%	0,00%	28,19%	0,00%
2	15%	1,92	0,00%	0,00%	1,93%	0,76%	4,82%	35,00%	35,00%	0,00%	22,49%	0,00%
3	20%	5,68	0,00%	0,00%	3,44%	1,11%	8,54%	35,00%	27,86%	0,00%	24,06%	0,00%
4	30%	19,32	0,00%	0,00%	6,40%	1,79%	15,98%	35,00%	6,41%	0,00%	34,43%	0,00%
5	50%	71,04	0,00%	0,00%	12,68%	3,21%	30,76%	35,00%	0,00%	0,00%	18,35%	0,00%
6	65%	136,20	0,00%	0,00%	23,47%	9,74%	35,00%	0,00%	16,03%	0,00%	15,76%	0,00%

Процесс перераспределения капитала между акциями и облигациями показан на рис. 1 и 2.

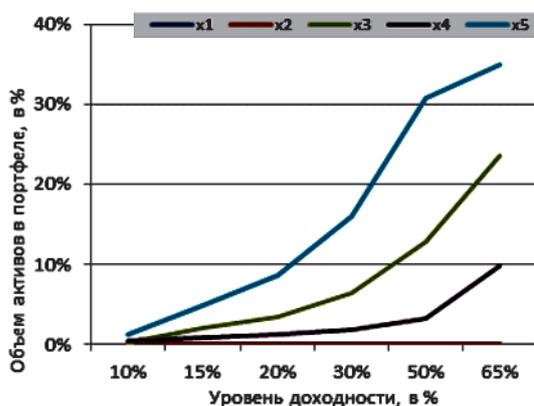


Рис. 1. Распределение акций в портфеле

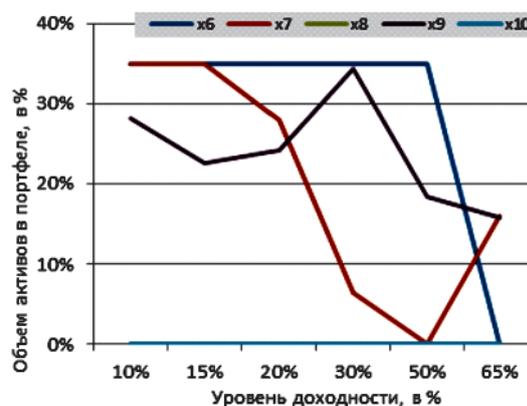


Рис. 2. Распределение облигаций в портфеле

Далее рассмотрим поведение каждого актива в отдельности. Отобранные для вычислительного эксперимента акции компаний обладают разными уровнями риска и доходности. При увеличении эффективности портфеля акции x_5 , x_3 и x_4 увеличиваются, при этом доля бумаги x_5 достигает ограничения в 35%. В то же время бумаги x_1 и x_2 вообще не участвуют в формировании инвестиционного портфеля. Это объясняется тем, что бумаги x_1 и x_2 обладают малым

уровнем доходности и при этом являются более рисковыми, чем x_5 , x_3 и x_4 .

Отобранные для эксперимента облигации ведут себя схожим образом. Облигация x_4 обладает хорошей доходностью и при этом минимальным риском. Поэтому в инвестиционном портфеле ее доля максимальна до порога 50% эффективности. Для достижения прибыли более 50% бумаги x_4 замещаются акциями и компенсируются активом x_7 .

Облигация x_9 обладает средними характеристиками «доходность-риск», поэтому выполняет балансирующую роль в инвестиционном портфеле, позволяя достигать требуемого уровня эффективности. Облигации x_8 и x_{10} не участвуют в формировании портфеля из-за низких характеристик доходности по отношению к риску.

Полученные доли ценных бумаг в инвестиционном портфеле соответствуют классическим распределениям активов при рыночной стратегии минимизации рисков. Таким образом, полученные значения распределения долей могут быть использованы для формирования реального инвестиционного портфеля организации с действующими ограничениями.

Список литературы

1. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М, 1994. – С. 90–97.
2. Спивак С.И., Саяпова Е.В., Ахтямов Р.Э. Математическая модель оптимального портфеля // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – №2(28). – С. 48–52.
3. Ясин Е.Г. Сценарии развития России на долгосрочную перспективу. – М.: Фонд «Либеральная миссия», 2011.

4. Брэдли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов: пер. с англ. – М.: Олимп-бизнес, 1997.

5. Холт Р.Н., Барнес С.Б. Планирование инвестиций. – М.: Дело ЛТД, 1994.

References

1. Pervozvanskij A.A., Pervozvanskaya T.N. *Finansovyy rynek: raschet i risk (Financial market: calculation and risk)*. Moscow: Infra-M, 1994.

2. Spivak S.I., Sayapova E.V., Ahtyamov R.E. *Sistemy upravleniya i informacionnye tehnologii*, 2007, no.28, pp. 28–52.

3. Yasin E.G. *Scenarii razvitiya Rossii na dolgosrochnuyu perspektivu (Long-term scenarios of Russia's development)*. Moscow: Fond «Liberalnaya missiya», 2011.

4. Brealey R.A., Myers S.C. *Principy korporativnyx finansov (Principles of corporate finance)*. Moscow: Olimp-business, 1997.

5. Holt R.N., Barnes S. B. *Capital budgeting*. Moscow: Delo LTD, 1994.

Рецензенты:

Галушкин А.И., д.т.н., профессор, начальник лаборатории «Интеллектуальные информационные системы» ФГНУ «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти», г. Москва;

Сидоренко С.В., д.э.н., начальник Отдела по интеграции науки и образования РАН, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 01.03.2012.