УДК 519.816:330.42

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЕЙ ЦЕННЫХ БУМАГ

[1]Семенчин Е.А., [2]Денисенко А.О.

[1]ГОУ ВПО Кубанский государственный университет, Краснодар;

[2]ГОУ ВПО Майкопский государственный технологический университет, Майкоп, e-mail: afmosu@mail.ru

В современной науке разработано и используется на практике множество методов решения задачи многокритериальной оптимизации. Большая часть вышеуказанных методов основана на сведении многокритериальной задачи оптимизации к однокритериальной путем использования методов свертки частных критериев оптимальности, в частности, метода линейной свертки. Цель данной работы – указать способ линейной свертки критериев, с помощью которого коэффициенты α^i в линейной комбинации критериев определяются путем решения некоторой оптимизационной задачи; использовать предложенный способ в задачах оптимизации портфелей ценных бумаг. В статье изложена методика оптимальной оценки коэффициентов (весов) во взвешенной сумме частных критериев многокритериальной задачи оптимизации. Предлагается использовать эту методику для оптимизации портфелей ценных бумаг (Шарпа, Марковица).

Ключевые слова: оптимизация портфеля ценных бумаг, критерии оптимизации, свертка критериев в многокритериальных задачах

ABOUT ONE METHOD OF CONVOLUTION OF THE CRITERIA IN MULTICRITERIAL PROBLEMS AND ITS APPLICATION AT THE DECISION OF THE PROBLEMS OF OPTIMISATION OF THE PORTFOLIOS OF SECURITIES

[1]Semenchin E.A., [2]Denisenko A.O.

[1]The Kuban State University, Krasnodar;

[2]Maykop State Technological University, Maykop, e-mail: afmosu@mail.ru

In modern science, many methods for solving multi-objective optimization are developed and used. The best part, the above methods is based on the reduction of multi-criteria optimization problem in one-criterion, by using the methods of the convolution of partial criteria of optimality, in particular, the method of linear convolution. The aim of this work – a way to specify a linear convolution of criteria by which the αi coefficients in the linear combination of criteria determined by solving some optimization problem, using the proposed method in optimization problem, using the proposed method in optimization of portfolios of securities. The article sets out the methodology of optimal estimates of the coefficients (weights) in the weighted sum of the partial criteria multiobjective optimization problem. It is proposed to use this technique to optimize portfolios (Sharpe, Markowitz).

Keywords: portfolio optimization, optimization criteria, the convolution of criteria in multicriteria problems

В настоящее время разработано множество методов решения задачи многокритериальной оптимизации. Большая часть этих методов основана на сведении многокритериальной задачи оптимизации к однокритериальной методами свертки частных критериев оптимальности, в частности, методом линейной свертки.

Цель данной работы – указать способ линейной свертки критериев, с помощью которого коэффициенты α_i в линейной комбинации критериев определяются путем решения некоторой оптимизационной задачи; использовать предложенный способ в задачах оптимизации портфелей ценных бумаг.

1. Способ оценки коэффициентов в линейной свертке

Рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации: пусть функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, определены на множестве X, $X \subset R^n$, R^n – n-мерное вещественное пространство, и отображают X соответственно в $Y_i \subset R = (-\infty, \infty)$; требуется найти

$$f_i(x) \to \min_{x \in X}, \ i = 1, 2, ..., m. \tag{1}$$

Основные способы решения этой задачи основаны на свертке критериев $f_i(x)$ из (1) [2]. Из различных способов свертки критериев на практике наиболее часто используется способ линейной свертки. Он предполагает объединение критериев из (1) путем построения линейной комбинации $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$ (построению взвешенной суммы частных критериев) и переходу к однокритериальной задаче:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \min_{x \in X}; \tag{2}$$

$$\alpha_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \tag{3}$$

где α_i определяются экспертами. Однако такой подход определения α_i, основанный на субъективном мнении экспертов, приводит в конечном итоге к тому, что решение задачи (2), (3) будет в значительной степени субъективным. В данном пункте предлагается другой способ определения α_i, $i = 1, 2, ..., m$. Вначале будем допускать, что все критерии из (1) не ранжированы. В этом случае предлагается следующий способ свертки критериев $f_i(x)$ из (1).

Пусть заданы точки $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(r)} \in X$. Вычислим значения

$$y_i^{(k)} = f_i(x^{(k)}),\quad i = 1,2,...,m,\quad k = 1,...,r,$$

и построим линейную комбинацию

$$y(\alpha_1,...,\alpha_m,x^{(k)}) = \alpha_1 f_1(x^{(k)}) + \alpha_2 f_2(x^{(k)}) + ... + \alpha_m f_m(x^{(k)}),\quad k = 1,...,r,$$

в которой α_i, $i = 1, 2, ..., m$, предлагается выбирать (приближенно) путем решения задачи нелинейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{m}\Big[(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,x^{(1)}) - y_i^1)^2 + (y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,x^{(2)}) - y_i^2)^2 + ...$$
$$... + (y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,x^{(r)}) - y_i^r)^2\Big] \to \min_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1; \tag{5}$$

$$\alpha_i \ge 0,\quad i = 1,...,m. \tag{6}$$

Задача (4)–(6) может быть решена методами, описанными в [2]. Для ее численного решения можно использовать различные инструментальные средства, например, офисным приложением электронных таблиц Excel.

Пусть теперь критерии $f_1(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, ранжированы следующим образом:

$$f_1(x) \succ= f_2(x) \succ= ... \succ= f_m(x), \tag{7}$$

где соотношение

$$f_p(x) \succ= f_{p+1}(x),\quad p = 1,...,m-1,$$

означает что критерий $f_p(x)$ не менее предпочтителен, чем критерий $f_{p+1}(x)$. Однако степень предпочтительности $f_p(x)$ по отношению к $f_{p+1}(x)$ неизвестна (не указана). В этом случае, очевидно α_i, $i = 1, ..., m$, должны удовлетворять дополнительному условию

$$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \ge \alpha_n. \tag{8}$$

Тогда задача приближенного вычисления α_i, $i = 1, 2, ..., m$, в случае их ранжирования согласно (7) сводится к решению оптимизационной задачи (4)–(6),(8).

Пример 1. Пусть в модели (4)–(6), $i = 1, 2$; $r = 1, 2, ..., 5$, $x^{(1)} = 0,5$; $x^{(2)} = 3$; $x^{(3)} = 4,5$; $x^{(4)} = 7$; $x^{(5)} = 8,5$. Тогда, воспользовавшись офисным приложением электронных таблиц Excel, найдем $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,5$.

Если критерии $f_1(x)$, $f_2(x)$, ранжированы $(f_1(x) \succ= f_2(x))$, то решая эту же задачу при дополнительном условии (8) (т.е. $\alpha_1 \ge \alpha_2$), получим тот же результат: $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,5$.

2. Явные формулы для вычисления коэффициентов в линейной свертке критериев

В задачах (4)–(6), (4)–(7) коэффициенты α_i, $i = 1, ..., m$, как отмечалось в п.1, определяются методами нелинейного программирования. Покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях на функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, из (1) можно указать явные формулы для вычисления α_i, $i = 1, ..., m$.

Продифференцируем левую часть выражения (4) последовательно по $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Из необходимого условия экстремума следует, что $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{m}(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^1)y'_{\alpha_1} + 2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^2)y'_{\alpha_1} + ... \\ +2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^n)y'_{\alpha_1}\big\} = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{m}(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^1)y'_{\alpha_2} + 2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^2)y'_{\alpha_2} + ... \\ +2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^n)y'_{\alpha_2}\big\} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\sum_{i=1}^{m}(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^1)y'_{\alpha_n} + 2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^2)y'_{\alpha_n} + ... \\ +2(y(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_i) - y_i^n)y'_{\alpha_n}\big\} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

которая, после преобразований, принимает вид:

$$\begin{cases} \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{m} f_1^2(x_i)+\alpha_2\sum\limits_{i=1}^{m} f_2(x_i)f_1(x_i)+\ldots+\alpha_n\sum\limits_{i=1}^{m} f_n(x_i)f_1(x_i)= \\ =\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}(f_1^2(x_i)+f_1(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)\,f_1(x_i), \\ \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{m} f_2(x_i)f_1(x_i)+\alpha_2\sum\limits_{i=1}^{m} f_2^2(x_i)+\ldots+\alpha_n\sum\limits_{i=1}^{m} f_n(x_i)f_2(x_i)= \\ =\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}(f_1(x_i)f_2(x_i)+f_2^2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)\,f_2(x_i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\sum\limits_{i=1}^{m} f_n(x_i)f_1(x_i)+\alpha_2\sum\limits_{i=1}^{m} f_n(x_i)f_2(x_i)+\ldots+\alpha_n\sum\limits_{i=1}^{m} f_n^2(x_i)= \\ =\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}(f_n(x_i)f_1(x_i)+f_n(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n^2(x_i). \end{cases} \qquad (10)$$

Согласно правилу Крамера система (10) будет иметь единственное решение, если ее главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} f_1^2(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i)f_1(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_1(x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i)f_1(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2^2(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_2(x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_1(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_2(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n^2(x_i) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

отличен от нуля: $\Delta \neq 0$.

Введем вспомогательные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1^2(x_i)+f_1(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)f_1(x_i)) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i)f_1(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_1(x_i) \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1(x_i)f_2(x_i)+f_2^2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)f_2(x_i)) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2^2(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_2(x_i) \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_n(x_i)f_1(x_i)+f_n(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n^2(x_i)) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_2(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n^2(x_i) \end{vmatrix},$$

……………………………………………………………………………………………

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} f_1^2(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i)f_1(x_i) & \ldots. & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1^2(x_i)+f_1(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)f_1(x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i)f_1(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2^2(x_i) & \ldots. & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1(x_i)f_2(x_i)+f_2^2(x_i)+\ldots+f_n(x_i)f_2(x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_1(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_n(x_i)f_2(x_i) & \ldots. & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_n(x_i)f_1(x_i)+f_n(x_i)f_2(x_i)+\ldots+f_n^2(x_i) \end{vmatrix}.$$

Тогда, по теореме Крамера,

$$\alpha_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (12)$$

Следовательно, если $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, из (1) непрерывны на X и удовлетворяют в заранее заданных точках $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)} \in X$

условию $\Delta \neq 0$, то $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ определяются соотношениями (12).

Пример 2. Пусть $n = 2$, значения $x_i, f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$, $i = 1, ..., 5$ те же, что и в примере 1. Из соотношений (12) следует, что как и ранее (см. пример 1), $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,5$.

3. Оптимизация состава портфелей ценных бумаг

3.1. *Оптимизация состава портфеля ценных бумаг Шарпа*

Математическая модель портфеля ценных бумаг Шарпа имеет вид [4]:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i \cdot W_i) + (R_m + R_f)\cdot\sum_{i=1}^{n}(\beta_i \cdot W_i) \to \max_W, \quad W = (W_1,...,W_n), \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(\beta_i \cdot W_i)\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N}(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)} \le \sigma_{reg}, \\ W_i \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1. \end{cases} \tag{13}$$

где γ_i, β_i, W_i, σ_{ri} – соответственно избыточная доходность, вес, риск, остаточный риск, R_f – доходность ценных бумаг; R_m – ожидаемая доходность рынка в целом; σ_m – среднее квадратическое отклонение доходности рынка; σ_{reg} – максимально допустимая величина риска портфеля ценных бумаг.

В модели (13) предполагается, что величина σ_{reg} заранее задана (например, экспертом).

Перейдем от модели (13) к модели, в которой дополнительно минимизируется величина риска портфеля:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i \cdot W_i) + (R_m + R_f)\cdot\sum_{i-1}^{n}(\beta_i \cdot W_i) \to \max_W, \quad W = (W_1,...,W_n), \\ \sum_{i=1}^{n}(\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot {\sigma_m}^2 + \sum_{i=1}^{N}(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2) \to \min_W, \\ W_i \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Модель (14) будем называть моделью оптимизации портфеля Шарпа.

От модели (14) с двумя критериями, путем линейной свертки критериев [3]), перейдем к модели с одним критерием:

$$\begin{gathered} \alpha_1 \cdot \left(R_f + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i \cdot W_i) + (R_m + R_f)\cdot\sum_{i-1}^{n}(\beta_i \cdot W_i)\right) - \\ -\alpha_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot {\sigma_m}^2 + \sum_{i=1}^{n}(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)\right) \to \max_W. \end{gathered} \tag{15}$$

и теми же ограничениями, что и в (14):

$$W_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1. \tag{16}$$

При определении α_1, α_2 в задаче (15),(16) следует воспользоваться способом решения задачи (2), (3), описанными в п.1. После определения α_1, α_2 решается задача квадратичного программирования (15), (16).

Пример 3. Пусть: $n = 3$,

$$f_1(w) = \left(R_f + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i \cdot W_i) + (R_m + R_f)\cdot\sum_{i-1}^{n}(\beta_i \cdot W_i)\right),$$

$$f_2(w) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot {\sigma_m}^2 + \sum_{i=1}^{n}(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)\right),$$

$R_f = 4$, $\gamma_1 = -7,04$, $\gamma_2 = -10,58$, $\gamma_3 = -6,17$, $\sigma_m = 8$, $\beta_1 = 2,833$, $\beta_2 = 5,913$, $\beta_2 = 2,672$,

$R_m = 3{,}5$, $\sigma_{r1} = 11{,}89$, $\sigma_{r2} = 14{,}34$, $\sigma_{r3} = 11{,}37$, $W_1 = -0{,}25$, $W_2 = 0{,}74$, $W_3 = 0{,}51$. Переходя от модели (13) к модели (14) и производя свертку в (14), придем к модели (15), (16), для которой, согласно методике п.1, рассчитаем весовые коэффициенты $\alpha_1 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 0{,}7$. Воспользовавшись офисным приложением электронных таблиц Excel, найдем решение модели (15), (16): $W_1 = 0{,}35$, $W_2 = 0{,}35$, $W_3 = 0{,}30$.

Следовательно, максимальная средняя эффективность состава портфеля при минимальном риске равна

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2\right)} = 7{,}69.$$

3.2. *Оптимизация состава портфеля ценных бумаг Марковица*

Математическая модель портфеля ценных бумаг Марковица имеет вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j b_{ij} \to \min,\ b_{ij} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right),\\ &\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1,\\ &\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i = m_p, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

где m_p – выбранное инвестором значение эффективности портфеля; θ_i – доля i-й ценной бумаги в портфеле; m_i – математическое ожидание эффективности R_i i-й ценной бумаги: $m_i = MR_i$, $i = 1, ..., n$. В модели (17) величина m_i предполагается заранее заданной (экспертом).

Перейдем от модели (17) к модели, представляющей собой задачу двухкритериальной оптимизации:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j b_{ij} \to \min_{\theta}, \qquad b_{ij} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right),\\ &\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i \to \max_{\theta}, \qquad \theta = \left(\theta_1, ..., \theta_n\right),\\ &\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Модель (18) будем называть моделью оптимизации портфеля Марковица.

Как и ранее, методом линейной свертки критериев [3] от модели (18) с двумя критериями можно перейти к задаче с одним критерием:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j b_{ij}\Big) - \alpha_2\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i\Big) \to \min_{\theta},\\ &i, j = 1, ..., n, \qquad b_{ij} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right),\\ &\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1,\\ &\alpha_1 \ge 0, \quad \alpha_2 \ge 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Приближенные значения α_1, α_2 в (19) можно найти способом, описаным в п.1. После определения α_1, α_2 решается задача квадратичного программирования (19).

Пример 4. Составим портфель Марковица из трех видов ценных бумаг с эффективностями R_1, R_2, R_3, которые являются не коррелированными случайными величинами с заданными математическими ожиданиями и стандартными отклонениями (данные приведены в % к цене покупки): $m_1 = MR_1 = 11$, $m_2 = MR_2 = 10$, $m_3 = MR_3 = 9$;

$$\sigma_1^2 = \operatorname{cov}(R_1, R_1) = 4, \quad \sigma_2^2 = \operatorname{cov}(R_2, R_2) = 3,$$

$$\sigma_3^2 = \operatorname{cov}(R_3, R_3) = 1,$$

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = 0, \quad i \ne j; \quad i, j = 1, ..., 3.$$

Перейдем последовательно от модели (17) к моделям (18),(19). Воспользовавшись способом определения α_1, α_2, описанным в п.1 $\theta_1 = -0{,}25$; $\theta_2 = 0{,}74$; $\theta_3 = 0{,}51$, находим $\alpha_1 = 0{,}75$; $\alpha_2 = 0{,}25$.

Решая задачу (19) (при указанных данных, и найденных α_1, α_2), построим оптимальный портфель Марковица: $\theta_1 = 0{,}7$; $\theta_2 = 0{,}11$; $\theta_3 = 0{,}82$; $\sum_{i=1}^{3} m_i\theta_i = 3{,}08.$

Численные эксперименты показывают, что предложенный и описанный метод в п.1 метод определения α_i в задаче (2), (3) является удобным. Предложенный метод определения α_i является удобным при использовании его на практике: задача определения α_i сводится к решению квадратичных задач программирования (4)–(6) или (4)–(6), (8), каждая из которых может быть решена доступными программными средствами. Данный метод определения α_i можно использовать при решении задач об оптимальных портфелях ценных бумаг (Марковица, Шарпа).

Список литературы

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998.

2. Линейное и нелинейное программирования / И.Н. Лященко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. – К.: Выща шк., 1975. – 372 с.

3. Математические методы и модели исследования операций: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 08.01.16 «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям / под ред. В.А. Колемаева. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 592 с.

4. Перепелица В.А., Попова В.Е., Семенчин Е.А. Теория игр и исследование операций. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2004. – 182 с.

5. Разработка и анализ инвестиционных проектов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://exsolver.narod.ru/Books/Fininvest/Invest/index.html (дата обращения: 17.06.11).

6. Ширяев В.И. Математика финансов: Опционы и риски, вероятности и хаос. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 200 с.

Рецензенты:

Копытов Г.Ф., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики и нанотехнологий ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар;

Лебедев К.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар;

Усатиков С.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры общей математики ГОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 18.07.2011.