УДК 519.21:519.246

ПРАВИЛО ОСТАНОВКИ КОНТРОЛЯ «ИЗ ПОСЛЕДНИХ R ОБЪЕКТОВ – K ДЕФЕКТНЫХ»

Гусев А.Л.

ФГУН «Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения» Роспотребнадзора, Пермь, e-mail: gusev@fcrisk.ru

Рассмотрено правило остановки контроля типа «из последних r объектов – k дефектных» для планов непрерывного контроля. Наряду с классическими планами контроля, когда после остановки контроля и переналадки оборудования возобновляют контроль с нуля, рассмотрены планы непрерывного контроля с памятью, когда после наступления остановки контроля запоминается последний результат контроля. В статье получены нижняя и верхняя границы математического ожидания проконтролированных объектов до наступления остановки по правилу «из последних r объектов – k дефектных» для контроля без памяти и с памятью.

Ключевые слова: непрерывный контроль, план контроля с памятью, остановка контроля, математическое ожидание проконтролированных объектов

INSPECTION STOPPING RULE «OUT OF THE LAST R-ITEMS – K-ITEMS ARE DEFECTIVE»

Gusev A.L.

Federal Scientific Center for Medical And Preventive Health Risk Management Technologies, Perm, e-mail: gusev@fcrisk.ru

In this article, we consider inspection stopping rule «out of the last r-items k- items are defective» for continuous inspection plans. Along with traditional inspection plans when the inspection is recommenced after equipment changeover starting from point «zero», we consider plans of continuous inspection with memory which memorize the result of the last step of inspection after the inspection is stopped. We have obtained lower and upper bounds of mathematical expectation of inspected items before the inspection is stopped according to the rule «out of the last r-items – k-items are defective» for traditional inspection and inspection with memory.

Keywords: continuous inspection, inspection plan with memory, inspection stopping rules, mathematical expectation of the inspected items

При управлении рисками здоровью населения целесообразно использовать непрерывный контроль с памятью. Это обусловлено тем, что если при традиционном подходе во время использования [1, 3] планов CSP-1 и CSP-2 при обнаружении дефектного объекта – дефектный объект подлежит замене на годный объект или дефектный объект просто изымается. Когда же речь идет о контроле показателя здоровья, то дефектный показатель здоровья (например, показатель заболеваемости, превышающий заранее определенное значение) просто регистрируется. Дефектный показатель здоровья нельзя изъять или заменить на годный показатель здоровья. Суть контроля с памятью заключается в следующем.

Планом непрерывного статистического контроля с памятью назовем такой план контроля, который после наступления остановки контроля по заранее заданному правилу запоминает последний результат контроля (замера показателя здоровья) в отличие от классических планов контроля, которые после остановки контроля возобновляют контроль с нуля [4]. До начала контроля с памятью формально считается, что наблюдался дефектный объект.

Целью исследования настоящей работы является получение нижней и верхней границы математического ожидания числа проконтролированных объектов до остановки контроля по правилу остановки контроля «из последних r объектов – k дефектных» как для планов контроля без памяти (классический случай), так и для планов контроля с памятью, предложенных автором настоящей статьи.

Материал и методы исследования

На основании теории рекуррентных событий, изложенной в [2], в [4] было показано, что правило остановки контроля представимо в виде рекуррентного события E, которое состоит в том, что появляется одно из состояний $A_1, A_2, \ldots, A_N$, отвечающих этому событию. При этом рекуррентное соотношение для события E имеет следующий вид:

$$P(E) = u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_{l-1} u_{n-(l-1)}, \qquad (1)$$

где $P(E)$ – вероятность появления события E; $L(A_i)$ – длина состояния A_i; $l = \max\limits_{1 \le i \le N}(L)A_i$ – максимальная длина состояний, соответствующих событию E; а c_h – вероятность перехода за h шагов из состояний $A_1, A_2, \ldots, A_N$ в эти же состояния; $h = \overline{0, l-1}$; $c_0 = 1$, u_n – вероятность того, что событие E происходит на n-м шаге контроля; $u_0 = 1$.

Также в [3] были даны следующие определения.

Состояние A_1: $\left\langle D_{j_1},\ldots,D_{j_n}\right\rangle$ перекрывается с состоянием A_2: $\left\langle D_{j_1},\ldots,D_{j_m}\right\rangle$ основанием $(D_{k_1},\ldots,D_{k_l})$, если $D_{k_1}=D_{j_{n-l+1}}=D_{i_l},\ldots,D_{k_l}=D_{j_n}=D_{i_l},\ldots$. Пусть имеются два состояния A_1: $\left\langle D_{j_1},\ldots,D_{j_n}\right\rangle$ и A_2: $\left\langle D_{j_1},\ldots,D_{j_m}\right\rangle$ и h – некоторое число шагов.

Будем говорить, что из состояния A_1 с началом $(D_{j_1},\ldots,D_{j_{n-m+h}})$ и основанием $(D_{j_{n-m+h+1}},\ldots,D_{j_n})$ можно перейти в состояние A_2 с окончанием $(D_{i_{m-h-1}},\ldots,D_{i_m})$ за h шагов ($h=\overline{h_0,m-1}$; $h_0=\max\,[1,\,m-n]$) с вероятностью $P(D_{i_{m-h-1}},\ldots,D_{i_m})$, если $D_{i_k}=D_{j_{n-m+h+k}}$ $(k=\overline{1,m-n})$.

В результате было показано [4], что математическое ожидание проконтролированных объектов (шагов контроля) до наступления события E равно:

$$\mu(E)=\frac{\sum_{j=0}^{l-1}c_j}{P(E)}. \qquad (2)$$

В [4] было показано, что для правила остановки контроля без памяти «из последних r объектов – $k=2$ дефектных объектов», т.е. для события $E_{r,k=2}$, справедливо равенство:

$$\mu\left(E_{r,2}\right)=\frac{2-p^{r-1}}{q\left(1-p^{r-1}\right)}, \qquad (3)$$

где q – вероятность дефектности объекта, а $p=1-q$ – вероятность годности объекта.

Легко видеть, что правилу остановки контроля с памятью «из последних r объектов – $k=2$ дефектных», т.е. событию $E^{\Pi}_{r,k=2}$ соответствуют следующие состояния:

$$\langle 1\rangle,\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 0,0,1\rangle,\ \ldots,\ \left\langle \underbrace{0,\ldots,0}_{r-1},1\right\rangle,\ \left\langle \underbrace{0,}_{r-1}\ldots,0,1,1\right\rangle,\ \left\langle \underbrace{0,}_{r-1}\ldots,0,1,0,1\right\rangle,\ldots,\ \left\langle \underbrace{0,\ldots,}_{r-1}\ \underbrace{0,1,0,\ldots,0,1}_{r}\right\rangle.$$

Здесь и далее «1» обозначаем дефектный объект, «0» обозначаем годный объект. Следовательно

$$P\left(E^{\Pi}_{r,k=2}\right)=q\sum_{j=0}^{r-2}p^j+q^2\sum_{j=r-1}^{2r-3}p^j=(1-p^{r-1})+q(p^{r-1}-p^{2r-2});$$

$$\sum_{j=0}^{l-1}c_j^{(E^{\Pi}_{r,k=2})}=1+q\sum_{j=0}^{r-2}p^j+q^2\sum_{j=r-1}^{2r-3}p^j=2-p^{r-1}+q(p^{r-1}-p^{2r-2}).$$

Тогда

$$\mu\left(E^{\Pi}_{r,k=2}\right)=\frac{2-p^{r-1}+q(p^{r-1}-p^{2r-2})}{(1-p^{r-1})+q(p^{r-1}-p^{2r-2})}. \qquad (4)$$

Результаты исследования и их обсуждение

Параллельно будем проводить общие рассуждения для контроля без памяти и для контроля с памятью. Для контроля без памяти событию $E_{r,k}$ – правилу остановки контроля «из последних r объектов – k дефектных» соответствуют следующие состояния:

$$\left\langle \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k}\right\rangle,\left\langle \underbrace{1,0,1,\ldots,1}_{k+1}\right\rangle,\left\langle \underbrace{1,1,0,1,\ldots,1}_{k+1}\right\rangle,\ldots,\left\langle \underbrace{1,\ldots,1,0,1}_{k+1}\right\rangle,\left\langle \underbrace{1,0,0,1,\ldots,1}_{k+2}\right\rangle,\ldots,$$

$$\left\langle \underbrace{1,\ldots,1,0,0,1}_{k+2}\right\rangle,\ldots,\left\langle \underbrace{1,\underbrace{0,\ldots,0,}_{r-k}1,\ldots,1}_{r}\right\rangle,\ldots,\left\langle \underbrace{1,\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0,}_{r-k}1}_{r}\right\rangle.$$

С длиной, равной k, будет C_{k-2}^{k-2} состояний, с длиной $(k+1)$ будет C_{k-1}^{k-2} состояний и т.д. С длиной, равной r, будет C_{k-2}^{k-2} состояний. Тогда

$$P(E_{r,k})=q^k\sum_{j=0}^{r-k}p^jC_{j+k-2}^{j}. \qquad (5)$$

Для контроля с памятью событию $E^{\Pi}_{r,k}$ – правилу остановки контроля «из последних r объектов– k дефектных» соответствуют следующие состояния:

$$\left\langle\underbrace{1,1,\dots,1}_{k-1}\right\rangle,\left\langle\underbrace{0,1,\dots,1}_{k}\right\rangle,\left\langle\underbrace{1,0,1,\dots,1}_{k}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{1,\dots,1,0,1}_{k}\right\rangle,\left\langle\underbrace{1,0,0,1,\dots,1}_{k+1}\right\rangle,\dots,$$

$$\left\langle\underbrace{1,\dots,1,0,0,1}_{k+1}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{1,\underbrace{0,\dots,0}_{r-k},1,\dots,1}_{r-1}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{1,\dots,1,\underbrace{0,\dots,0}_{r-k},1}_{r-1}\right\rangle,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}\right\rangle,$$

$$\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,0,1,\dots,1}_{k+1}\right\rangle,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,1,0,1,\dots,1}_{k+1}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,\dots,1,0,1}_{k+1}\right\rangle,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,0,0,1,\dots,1}_{k+2}\right\rangle,\dots,$$

$$\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,\dots,1,0,0,1}_{k+2}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k}1,\dots,1}_{r}\right\rangle,\dots,\left\langle\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k+1}\underbrace{1,\dots,1,\underbrace{0,\dots,0,}_{r-k}1}_{r}\right\rangle.$$

С длиной, равной $(k-1)$, и длиной $(r+1)$ будет C_{k-2}^{k-2} состояний, с длиной k и длиной $(r+2)$ будет C_{k-1}^{k-2} состояний и т.д. С длиной, равной $(r-1)$, и длиной, равной $(2r-k+1)$, будет C_{k-2}^{k-2} состояний. Тогда

$$P(E_{r,k}^{\Pi}) = q^{k-1}\sum_{j=0}^{r-k} p^j C_{j+k-2}^{j} + q^k \sum_{j=0}^{r-k} p^{r-k+1+j} C_{j+k-2}^{j}. \qquad (6)$$

Как было указано в [3], при невозможности выписать в явном виде выражения для $\sum c_i$ можно найти такие $\sum c_i^*$ и $\sum c_i^{**}$, что $\sum c_i^{**} \le \sum c_i \le \sum c_i^{**}$. Тогда из выражения (2) будет следовать, что нижняя и верхняя границы математического ожидания проконтролированных объектов (шагов контроля) до наступления события равны

$$\mu_H(\bullet) = \frac{\sum c_i^*}{P(\bullet)} \quad \text{и} \quad \mu_B(\bullet) = \frac{\sum c_i^{**}}{P(\bullet)}.$$

Введем l и l^{Π} – максимальные длины состояний, соответствующие событиям $E_{r,k}$ и. Учитывая тот факт, что остановка контроля на j-м шаге происходит обязательно после того, как на этом шаге контроля зафиксировано $(D_j = 1)$, нетрудно видеть, что из основания, равного $(D_j = 1)$, можно попасть в любое состояние из совокупности состояний: $A_1, A_2, \dots, A_N$ с одной и той же вероятностью. Это соответствует тому, что за h шагов появится *(k-1)* дефектный объект и на последнем h-м шаге будет дефектный объект. Тогда $\sum c_i^*$ для остановки контроля без памяти и контроля с памятью есть сумма вероятностей перехода из основания $(D_j = 1)$в состояния: $A_1, A_2, \dots, A_N$ и они соответственно равны:

$$\sum_{i=0}^{l-1} c_i^* = 1 + q^{k-1}\sum_{j=0}^{r-k} p^j C_{(j+k-2)}^{j}; \qquad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{l^{\Pi}-1} {}^{\Pi}c_i^* = 1 + q^{k-1}\sum_{j=0}^{r-k} p^j C_{j+k-2}^{j} + q^k \sum_{j=0}^{r-k} p^{j+(r-k+1)} C_{j+k-2}^{j}. \qquad (8)$$

Для нахождения $\sum c_i^{**}$ проведем следующие рассуждения. За h шагов может быть i дефектных объектов, где i изменяется от 1 до $(k-2)$. При этом количество шагов должно быть не меньше, чем количество дефектных объектов, но не более $(r-k+i)$. Тогда вероятность перехода из всевозможных оснований, отличных от $(D_j = 1)$ в состояния соответствующие событию $E_{r,k}$, без учета из какого состояния и в какое состояние совершен переход, равна:

$$\sum_{i=1}^{k-2}\sum_{h=i}^{r-k+i} C_{h-1}^{i-1} q^i p^{h-i}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{l-1} c_i^{**} = \sum_{i=0}^{l-1} c_i^* + \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{h=i}^{r-k+i} C_{h-1}^{i-1} q^i p^{h-i}.$$

Иначе

$$\sum_{i=0}^{l-1} c_i^{**} = 1 + q^{k-1}\sum_{j=0}^{r-k} p^j C_{j+k-2}^{j} + \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{h=i}^{r-k+i} C_{h-1}^{i-1} q^i p^{h-i}. \qquad (11)$$

Для контроля с памятью рассуждения будут аналогичными.

За h шагов может быть i дефектных объектов, где i изменяется от 1 до $(k-2)$. При этом количество шагов должно быть не меньше, чем количество дефектных объектов, но не более $(r-k+i)$. Тогда вероятность перехода из всевозможных оснований, отличных от $(D_j = 1)$, в состояния соответствующие событию $E^{\Pi}_{r,k}$, равна:

$$\sum_{i=1}^{k-2} \sum_{h=i}^{r-k+i} C_{h-1}^{i-1} q^i p^{h-i}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{l^{\Pi}-1} {}^{\Pi}c_i^{**} = 1 + q^{k-1} \sum_{j=0}^{r-k} p^j C_{j+k-2}^{j} + q^k \sum_{j=0}^{r-k} p^{j+(r-k+1)} C_{j+k-2}^{j} + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{h=1}^{r-k+i} C_{h-1}^{i-1} q^i p^{h-i}. \qquad (12)$$

Заключение

Понятно, что аналогичным образом можно рассматривать правила остановки классического непрерывного контроля и непрерывного контроля с памятью типа «из последних r_1 объектов – k_1 дефектных или из последних r_2 объектов – k_2 дефектных» и так далее. Планы контроля, использующие остановки контроля «из последних r_1 объектов – k_1 дефектных или из последних r_2 объектов – k_2 дефектных» направлены на обнаружение как резкого изменения входного качества объектов, так и плавного изменения входного качества объектов.

Список литературы

1. Беляев Ю.К. Вероятностные методы выборочного контроля. – М.: Наука, 1975.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. – М.: Мир, 1984.

3. Dodge H.F. A sampling inspection plan for continuous production // Annals of Mathematical Statistics. – 1943. – №14. – P. 264–279.

4. Gusev A.L. Recurrent events and characteristics of plans of continuous control // Journal of Mathematical Sciences. – 1995. – Vol. 75, (2). – P. 1571–1575.

5. Dodge H.F., Romig H.G. Sampling Inspection tables single and double sampling. – New York, 1944.

6. Беляев Ю.К., Носко В.П. Основные понятия и задачи математической статистики. – М.: Изд-во МГУ, ЧеРо, 1998. – 192 с.

7. Гусев А.Л. О различных схемах непрерывного контроля // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. – Пермь: 1988. – С. 123–128.

8. Гусев А.Л. Характеристики правил остановки контроля // Надежность и контроль качества. – М.: 1989. – № 4. – С. 57–63.

Рецензенты:

Ясницкий Л.Н., д.т.н., профессор, зав. кафедрой прикладной информатики и искусственного интеллекта ГОУ ВПО «Пермский государственный педагогический университет», г. Пермь;

Пенский О.Г., д.т.н., доцент, профессор кафедры процессов управления и информационной безопасности ГОУ ВПО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», г. Пермь.

Работа поступила в редакцию 03.10.2011.