УДК 625.816

ОБОСНОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПЛАВНОСТИ МЕХАТРОННЫХ ПРИВОДОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Новикова Е.А.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, e-mail: tms@vlsu.ru

Статья посвящена разработке и обоснованию критериев плавности для мехатронных приводов поступательного перемещения. Проведен критический анализ существующих критериев плавности и показаны их недостатки в оценке плавности поступательного перемещения. Предложен новый подход в разработке критериев плавности, когда физическому понятию плавности соответствует математическое понятие полной вариации. Это позволило вывести общий вид показателей плавности для мехатронных приводов с поступательным выходным перемещением и показать соответствие введенных показателей существующим характеристикам и критериям. Для приводов поступательного перемещения предложено использовать показатели плавности первого и второго рода. Для показателей плавности введены интегральная и вариационная формулировки, которые эквивалентны только в случае непрерывности подынтегральной функции. В случаях разрывных дифференциальных уравнений, переключений и кусочно-непрерывных сшиваний решений, которые характерны для динамических систем с люфтом, сухим трением и т.п. разрывными особенностями, предлагается использовать вычисление показателей плавности через вариационную формулировку.

Ключевые слова: мехатронный привод, критерии плавности

SUBSTANTION OF CRITERIA OF SMOOTHNESS OF MECHATRONIC DRIVES OF FORWARD MOVING

Novikova E.A.

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, e-mail: tms@vlsu.ru

Paper is devoted to the development and justification of criteria for smoothness of mechatronic drives forward movement. Critical analysis of the existing criteria for smoothness and shows their weaknesses in the evaluation of smooth forward movement. A new approach to developing criteria for smoothness, when smoothness corresponds to the physical concept of the mathematical concept of total variation. This allowed to deduce the general form of the smoothness indicators for mechatronic drive with forward movement of the output and input indicators to show compliance with the existing specifications and standards. To drive the translational motion is proposed to use indicators of smoothness of the first and second kind. For smooth performance introduced integral and variational formulations, which are equivalent only if the continuity of the integrand. In the case of discontinuous differential equations, switching and piecewise continuous matching solutions, which are characteristic of dynamic systems with backlash, dry friction, etc. discontinuous features, are encouraged to use the calculation of performance over a smooth variational formulation.

Keywords: mechatronic drive, criteria of smoothness

Проектирование мехатронных приводов предполагает введение показателей, позволяющих объективно оценивать такое качество выходного движения привода, как плавность. Понятие плавности как меры неравномерности движения, несмотря на многие попытки исследователей и проектировщиков, не нашло в литературе однозначного общепризнанного определения. Отсутствие единого понимания плавности было вызвано тем, что при решении определенных частных задач внимание исследователей было направлено, главным образом, на достижение конкретного качества динамики. Например, В.А. Бесекерский [1], формулируя требования по плавности для следящих систем воспроизведения угла, определяет плавность как отсутствие скачкообразного движения при низких скоростях. Тем самым, под плавностью понимается отсутствие остановок выходного звена при постоянной скорости вращения двигателя. Однако предложенный подход, позволяя решить данную задачу обеспечения плавности в режиме низких скоростей, не может быть распространен на другие случаи.

Обстоятельный анализ существующих оценок плавности дан в работе [2]. Приведем основные, наиболее характерные подходы, позволяющие сформулировать плавность как вполне определенное, самостоятельное понятие качества динамики. Наибольшее распространение получила оценка плавности с помощью коэффициента неравномерности [2, 3]:

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{ср}}},$$

где $v_{\max}$, $v_{\min}$ и $v_{\text{ср}}$ – наибольшее, наименьшее и среднее значения скорости за цикл.

Здесь необходимо отметить, что не совсем удачно выбирать в качестве эталонного среднюю цикловую скорость $v_{\text{ср}}$, которая зависит от возмущения и может обращаться в ноль. Объективнее определять коэффициент неравномерности с помощью заданного (требуемого) значения скорости v_0:

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_0}. \qquad (1)$$

Оценка (1) характеризует относительный размах колебаний скорости. Недостаточность этой оценки показана на рис. 1: коэффициент δ не позволяет различать частоту неравномерности движения, оценивая только среднюю амплитуду колебаний: $\delta(v_1) = \delta(v_2)$. Очевидно, что закон является более «плавным», чем закон v_2.

Поэтому оценка плавности должна отражать динамичность проявления неравномерности, что и было предложено в интегральном критерии [2, 4]:

$$\delta = \frac{1}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{v(t)}{v_0}\right)^2 dt, \qquad (2)$$

где T – время наблюдения (время цикла); $v(t)$ – мгновенное значение скорости.

Показатель (2) более объективно оценивает неравномерность движения, однако, является, в сущности, интегральным критерием точности по скорости. На рис. 2 приведен пример, когда может иметь место движение более точное (относительно заданного закона v_0): $\delta(v_2) < \delta(v_1)$, – но гораздо менее «плавное». Из примера становится понятным, что критерий должен учитывать не только изменения скорости, но и ускорения, а в некоторых случаях и скорость изменения ускорения.

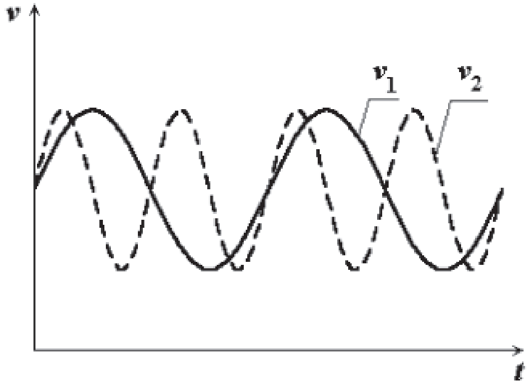

Рис. 1

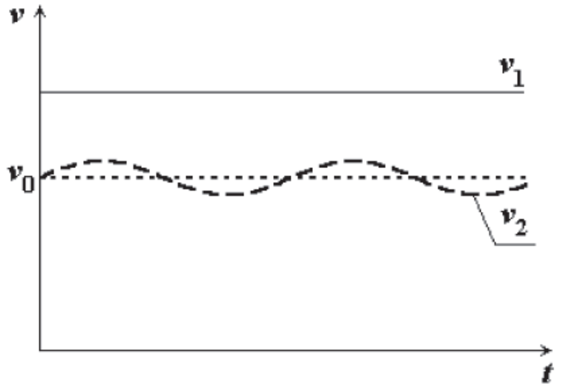

Рис. 2

Наиболее общий критерий такого типа имеет вид:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\alpha_1 \left(\frac{\Delta v(t)}{v_0(t)}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\Delta a(t)}{a_0(t)}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{\Delta \dot{a}(t)}{\dot{a}_0(t)}\right)^2 + ...,\right] dt \qquad (3)$$

где $v_0(t)$, $a_0(t)$, $\dot{a}_0(t)$, ... – требуемые мгновенные значения скорости, ускорения, производной ускорения и т.д.; $\Delta v(t) = v(t) - v_0(t)$, $\Delta a(t) = a(t) - a_0(t)$, $\Delta \dot{a}(t) = \dot{a}(t) - \dot{a}_0(t)$ – ошибки соответствующих динамических характеристик; α_1, α_2, α_3, α_3... – весовые коэффициенты.

Критерий (3) фактически оценивает точность воспроизведения закона (v_0, a_0, , $\dot{a}_0$...). Неудобства использования этого критерия проявляются в следующем: во-первых, надо знать не только требуемый закон скорости, но и ее производные; во-вторых, как правило, требуется, чтобы ускорение a_0 в системе было ограничено, а в установившемся режиме обращалось в ноль (что в данном критерии недопустимо); в-третьих, значения показателя зависят от весовых коэффициентов, выбираемых достаточно произвольно в зависимости от конкретных задач. Таким образом, видно, что при данном подходе плавность снова подменяется точностью воспроизведения некоторого закона. Более корректные оценки плавности были предложены в работах И.И. Артоболевского и впоследствии развиты Б.В. Новоселовым и В.В. Морозовым [2]. Сущность данного подхода заключается в том, чтобы определить степень неравномерности движения на бесконечно малом интервале времени Δt и затем надлежащим способом просуммировать по всему интервалу наблюдения. Полагается, что мера неравномерности скорости на интервале dt или *динамический коэффициент неравномерности* есть отношение приращения скорости к скорости движения

$$d\delta = \frac{dv}{v}. \qquad (4a)$$

С формальной точки зрения критерий (4) представляет собой запись критерия (1) в дифференциальной форме и обычное интегрирование по всему интервалу наблюдения

$$\delta = \int_0^T d\delta = \int_0^T \frac{dv}{v}$$

приводит оценку (4а) к оценке (1) со всеми недостатками последней. Дело состоит в том, что при непосредственном интегрировании приращения противоположных знаков алгебраически складываются так, что общий коэффициент неравномерности может обратиться в ноль. Поэтому при суммировании бесконечно малых приращений коэффициента неравномерности необходимо брать их абсолютные значения. При таком «арифметическом» суммировании абсолютных значений сложение проводится по интервалам монотонности $[t_{k-1}, t_k]$ динамического коэффициента неравномерности δ:

$$V_0^T \delta = \sum_{k=0}^{n} \left|\delta(t_k) - \delta(t_{k-1})\right|. \qquad (4б)$$

Из математического анализа известно, что в предельном переходе алгебраическое суммирование приращений функции является определенным интегралом от этой функции, а суммирование абсолютных значений приращений функции – полной вариацией функции на интервале суммирования:

$$\mathrm{Var}_0^T \delta = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n} \left|\delta(t_k) - \delta(t_{k-1})\right|. \qquad (5)$$

Этот критерий недостаточен для оценки плавности работы тех приводов, где необходимо ограничивать ускорение. Поэтому для оценки плавности, учитывающей мгновенные ускорения и мгновенные изменения ускорения, были предложены характеристические критерии 1-го и 2-го рода.

Характеристический критерий 1-го рода (коэффициент динамичности) представляет собой отношение момента сил инерции начального движения к кинетической энергии привода

$$æ(t) = \frac{2\dfrac{d\Omega}{dt}}{\Omega^2}. \qquad (6)$$

По аналогии для оценки скорости изменения ускорения вводится характеристический критерий 2-го рода (коэффициент рывков), который представляет собой отношение мгновенной мощности рывка к мгновенной мощности кинетической энергии

$$\tau(t) = \frac{2\dfrac{d^2\Omega}{dt^2}}{\Omega^3}. \qquad (7)$$

Существенной особенностью этих критериев является то, что они определены только для оценки вращательных движений (в критерии важно, что угловая скорость имеет размерность c^{-1}) и не могут быть прямо перенесены на случаи с поступательным выходным перемещением.

Пользоваться критериями (6) и (7) непосредственно нельзя, потому что они дают мгновенное значение коэффициента. Для получения общей оценки плавности необходимо усреднять или суммировать в определенной метрике: либо выбирая максимальное значение коэффициента на интервале наблюдения, либо интегрируя абсолютные значения.

От выбора метрики, с помощью которой проводится обработка критериев (6) и (7), зависят границы их применимости. Например, при наличии пилообразного перемещения нагрузки (рис. 3*а*) скорость меняется по разрывному закону (рис. 3*б*). Ускорение в точках разрыва обращается в бесконечность, поэтому оценка плавности с помощью критерия (6) (а тем более критерия (7)) в чебышевской метрике непригодна, т.к. она определена только на пространстве ограниченных функций.

$$\|f\| = \max\left|f(t)\right| \qquad (8)$$

Применение же интегральной метрики

$$\|f\| = \int\left|f(t)\right|dt \qquad (9)$$

вполне допустимо: несмотря на обращение подынтегральной функции в бесконечность интеграл может существовать и принимать конечное значение. В рассматриваемом примере ускорение представляет собой сумму δ-функций Дирака (число слагаемых суммы равно числу точек разрыва на интервале наблюдения) и интеграл от ускорения конечен и равен сумме скачков скорости. Однако критерий (7) неприменим даже в интегральной метрике из-за того, что в точках разрыва производная от ускорения не определена. Применение же более общей метрики (усреднение через полную вариацию первообразной)

$$\|f\| = \mathrm{Var}\, F \qquad (10)$$

позволяет оценивать пилообразное движение и по критерию (7), поскольку первообразная функция F может не быть дифференцируемой, но иметь ограниченную вариацию.

Ключевым моментом в предлагаемом подходе является определение того обстоятельства, что физическому понятию плавности наиболее полно отвечает математическое понятие полной вариации. Это позволит вывести общий вид показателей плавности для мехатронных приводов с поступательным выходным перемещением и показать соответствие введенных нами показателей рассмотренным характеристическим критериям (6) и (7). Для определения показателей плавности примем, что $f(t)$ – функция, описывающая скорость линейного перемещения [5]. Мерой плавности функции $f(t)$ на интервале $[a, b]$ положим полную вариацию функции:

$$\mathrm{Var}_a^b\ f = \sup_{T_n} \sum_k \left| f\left(t_k\right) - f\left(t_{k-1}\right) \right|, \quad (11)$$

где $T_n = \left\{ t_k \mid a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}$ – произвольное разбиение интервала $[a, b]$ на подинтервалы $[t_k, t_{k-1}]$; $\sup\limits_{T_n} \sum\limits_k$ – точная верхняя грань суммы по всевозможным разбиениям.

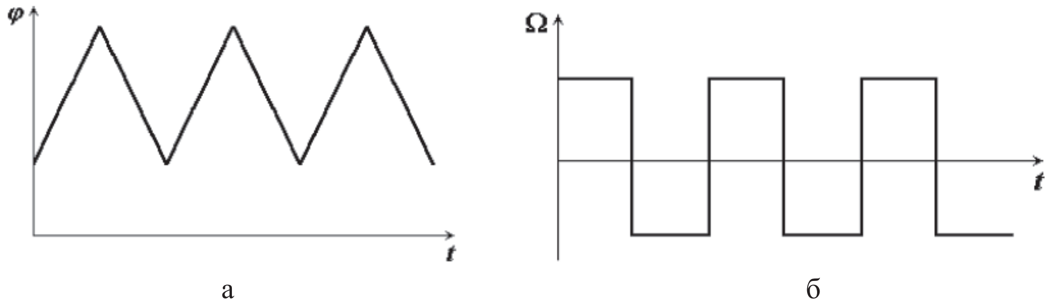

Рис. 3

Полная вариация представляет собой сумму размаха значений по участкам монотонности. В дальнейшем нам понадобятся следующие факты, позволяющие вычислять полную вариацию:

1) для монотонных функций

$$\mathrm{Var}_a^b\ f = \left| f\left(b\right) - f\left(a\right) \right|;$$

2) если $f(t) = \mathrm{const}$, то на любом интервале

$$\mathrm{Var}_a^b\ f = 0$$

3) если $f(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\mathrm{Var}_a^b\ f = \int_a^b \left| f'\left(t\right) \right|\ dt.$$

Для получения объективной оценки плавности движения необходимо меру (11) привести к безразмерному виду.

В качестве 1-го показателя плавности положим отношение полной вариации скорости $v(t)$ на интервале $0 \le t \le T$ (T – время наблюдения) к заданному значению скорости v_0 на этом интервале

$$I_1 = \frac{\tau_0}{T} \frac{\mathrm{Var}\ v}{v_0} = \frac{\tau_0}{T} \int_0^T \frac{\left| \dot{v}(t) \right|}{v_0} dt, \quad (12)$$

где τ_0 – некоторая постоянная времени, необходимая для приведения выражения к безразмерной величине.

Для приводов с вращательным выходным движением $\tau_0 = 1/\Omega_0$, где Ω_0 – заданная угловая скорость вращения выходного вала. В этом случае получаем известный показатель плавности (6) – коэффициент динамичности в интегральной форме. В приводе с поступательным выходным перемещением говорить о стабилизации движения по скорости можно лишь на участке H, не превышающем длины штока, вдоль которого происходит линейное перемещение объекта. Поскольку параметры H и v_0 являются внешними (не зависят от конструкции привода, а определяются условиями эксплуатации), то, полагая $\tau_0 = \mathrm{H}/v_0$, обеспечим независимость показателя I_1 относительно параметров привода. Имеем

$$I_1 = \frac{H}{T} \int_0^T \frac{\left| \dot{v}(t) \right|}{v_0^2} dt. \quad (13)$$

Правая часть выражения (13) представляет собой отношение работы, совершаемой в среднем за цикл динамической нагрузкой $ma_{\text{ср}}$:

$$A_{\text{ин}} = m\, a_{\text{ср}}\, H = m\, H\, \frac{1}{T} \int_0^T \left| \dot{v}\left(t\right) \right|\ dt,$$

к удвоенной средней кинетической энергии звена нагрузки

$$E_{\text{ж}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Поэтому плавность растет с увеличением кинетической энергии звена $E_{\text{ж}}$ и уменьшением работы сил инерции $A_{\text{ин}}$.

Однако показатель I_1 не полностью отражает неплавность перемещения объекта. В самом деле, пусть имеется ряд из n режимов выходных характеристик скорости (рис. 4).

$$v_n\left(t\right) = v_0 \left(\frac{t}{T} \right)^n, \quad (14)$$

где $0 \le t \le T$.

Требуется определить, какой из режимов v_n является наиболее плавным на участке $H = v_0 T$.

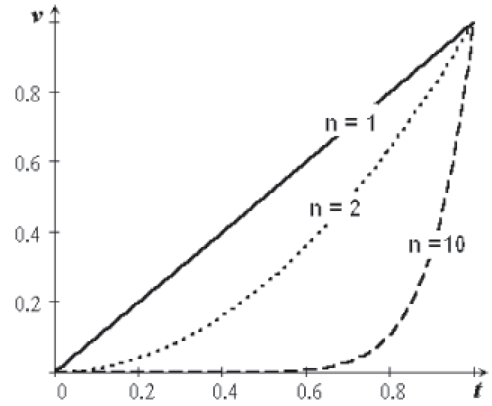

Рис. 4

Так как все функции v_n монотонны, то

$$I_1\left(v_n\right)=\frac{H}{T}\frac{v_n\left(T\right)-v_n\left(0\right)}{v_0^2}=1,$$

т.е. величина неплавности для всех характеристик одинакова.

Причина подобного явления заключается в том, что показатель I_1, являясь интегральной оценкой, оценивает неплавность «в среднем», на всем отрезке наблюдения. Из рисунка же видно, что с ростом степени n растет «локальная» неплавность характеристик v_n. Для более точной оценки плавности требуется введение еще одного показателя, который бы свидетельствовал о местных нарушениях плавности.

Второй показатель плавности определим через полную вариацию ускорения $a(t)=\dot{v}(t)$ на интервале $0 \le t \le T$.

$$I_2=\frac{\tau_0^2}{T}\frac{\mathrm{Var}\ a}{v_0}=\frac{H^2}{T}\int_0^T\frac{\left|\dot{a}(t)\right|}{v_0^3}\,dt. \quad (15)$$

Показатель (15) представляет собой коэффициент рывков (7) в интегральной форме и является отношением средней мгновенной мощности сил инерции нагрузки

$$N_{\text{ин}}=m\,\dot{a}_{\text{ср}}\,H=m\,H\,\frac{1}{T}\int_0^T\left|\dot{a}\left(t\right)\right|\,dt$$

к удвоенной цикловой мощности кинетической энергии нагрузки $N_{\text{к}}=E_{\text{к}}/\tau_0$. Поскольку мгновенная мощность представляет собой скорость изменения работы $A_{\text{ин}}$, то показатель I_2 ответствен именно за локальные проявления неплавности. Возвращаясь к примеру (14), определим теперь показатели плавности I_2 для каждого n-го режима движения:

$$I_2\left(v_n\right)=\frac{H^2}{T}\frac{\dot{v}_n\left(T\right)-\dot{v}_n\left(0\right)}{v_0^3}=n.$$

Таким образом, показатель I_2 выделяет режимы, при которых происходят резкие изменения ускорения. Предельным случаем такого поведения является движение с разрывной скоростью (рывок или удар) – в нашем примере это

$$v_\infty\left(t\right)=\lim_{n\to\infty}v_n\left(t\right)=\begin{cases}0, & t<T\\ 1, & t=T\end{cases}.$$

Здесь по-прежнему $I_1\left(v_\infty\right)=1$, тогда как $I_2\left(v_\infty\right)=\infty$. Обращение I_2 в бесконечность означает, что скорость претерпевает разрыв. Большое значение I_2 при малой величине I_1 свидетельствует о том, что объект испытывает кратковременные значительные ускорения (например, при ударных нагрузках, выборе люфта и т.п.).

Таким образом, в дальнейшем для анализа плавности выходного перемещения линейного мехатронного привода будут применяться следующие показатели:

- показатель плавности 1-го рода

$$I_1=\frac{H}{T}\frac{\mathrm{Var}\ \ v}{v_0^2}=\frac{H}{T}\int_0^T\frac{\left|a(t)\right|}{v_0^2}\,dt; \quad (16)$$

- показатель плавности 2-го рода

$$I_2=\frac{H^2}{T}\frac{\mathrm{Var}\ \ a}{v_0^3}=\frac{H^2}{T}\int_0^T\frac{\left|\dot{a}(t)\right|}{v_0^3}\,dt. \quad (17)$$

Обратим внимание, что в определении показателей (16) и (17) два варианта записи – интегральный и через полную вариацию – присутствуют не случайно: интегральная и вариационная формулировки эквивалентны, только если подынтегральная функция существует и непрерывна. В противном случае следует использовать более общее определение показателя через полную вариацию. Аналитическое вычисление полной вариации возможно лишь в простейших случаях, когда функция имеет конечное число экстремумов, которые, в свою очередь, могут быть определены аналитически. Поэтому, когда выходные динамические характеристики $v(t)$ и $a(t)$ аналитически определяются из системы дифференциальных уравнений динамики привода с непрерывной правой частью и, следовательно, являются непрерывно-дифференцируемыми функциями, мы будем пользоваться интегральной формулировкой. Случаи разрывных дифференциальных уравнений, переключений и кусочно-непрерывных сшиваний решений характерны для динамических систем с люфтом, сухим трением и т.п. разрывными особенностями и требуют вычисления показателей через полную вариацию. При численном определении показателей вариационная формулировка предпочтительнее интегральной, т.к. вычисление полной вариации массива представляет сумму абсолютных приращений соседних элементов массива, тогда как численное интегрирование требует применения дополнительных алгоритмов (метод Симпсона, метод трапеций и т.п.).

Обобщая введенные показатели плавности, определим k-й показатель плавности

$$I_k = \frac{\tau_0^k}{T}\frac{\mathrm{Var}\ v^{(k-1)}}{v_0} = \frac{H^k}{T}\int_0^T \frac{\left|v^{(k)}(t)\right|}{v_0^{k+1}}\,dt. \quad (18)$$

При $k = 1, 2$ получаем показатели (16) и (17), при $k = 0$ – известный интегральный показатель точности по скорости (2):

$$I_0 = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{Var}\ x}{v_0} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\left|\Delta v(t)\right|}{v_0}\,dt. \quad (19)$$

Физический смысл и практическая ценность I_k при $k > 2$ пока не вполне очевидны.

Список литературы

1. Бесекерский В.А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1970. – 576 с.
2. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 592 с.
3. Морозов В.В., Костерин А.Б., Новикова Е.А. Плавность динамических звеньев электромеханических приводов / под ред. В.В. Морозова; Владим. гос. ун-т – Владимир: ВлГУ, 1999. – 158 с.
4. Плавность работы электромеханических приводов / Б.В. Новоселов, В.В. Морозов, В.В. Бушенин, Л.Д. Потапова. – Владимир: ВПИ, 1986. – 180 с.
5. Теория механизмов и машин / под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.

Рецензенты:

Гоц А.Н., д.т.н., профессор кафедры тепловых двигателей и энергетических установок Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых Министерства образования и науки РФ, г. Владимир;

Житников Б.Ю., д.т.н., профессор, профессор кафедры специальной техники и информационных технологий ФГОУ ВПО ВЮИ ФСИН России, г. Владимир.

Работа поступила в редакцию 10.11.2011.