

УДК 621.4.001: 621.4.001.57

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Гоц А.Н.

*ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых», Владимир, e-mail: hotz@mail.ru*

Проводится анализ математических моделей по дискретным точкам, полученным в результате экспериментальных исследований, используемых для исследования и описания процессов, протекающих в поршневых двигателях. Условно разделяются эти модели на теоретические и эмпирические. На конкретном примере показано, что использование моделей планирования эксперимента в качестве эмпирических может привести к большим погрешностям, поскольку эти модели предназначены только для уменьшения количества экспериментов, а не для расчетов. Проверка данных экспериментов по этой модели приводит к большим погрешностям. Показано, что по виду кривой оценено (приближенно, например, в виде полинома второй степени) уравнение, описывающее результаты экспериментальных исследований. Затем вычислены коэффициенты в найденном уравнении. Расчетные данные по предлагаемой модели хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическая модель, скорость испарения, время испарения

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS ACCORDING TO EXPERIMENTAL RESEARCHES

Gots A.N.

*Vladimir state university of a name of Alexander Grigorjevicha and Nikolay Grigorjevicha Stoletovyh,
Vladimir, e-mail: hotz@mail.ru*

The analysis of mathematical models on the discrete points, received is carried out as a result of the experimental researches used for research and the description of processes, proceeding in piston engines. These models on theoretical and empirical are conditionally divided. On a concrete example it is shown, that use of models of planning of experiment as empirical can lead to to the big errors as these models are intended only for reduction of quantity of experiments, instead of for calculations. Check of the given experiments on this model leads to to the big errors. It is shown, that by the form by a curve it is appreciated (approximately, for example, as a polynom of the second degree) the equation describing results of experimental researches. Then factors in the found equation are calculated. The settlement data on offered model will well be coordinated to experimental data.

Keywords: mathematical model, speed of evaporation, time of evaporation

Разработка математических моделей по дискретным точкам, полученным в результате экспериментальных исследований, в настоящее время достаточно активно развивается при исследовании процессов, протекающих в поршневых двигателях. Это позволяет расширить диапазон расчетов (если отсутствуют экспериментальные данные), а также использовать модели при многовариантных расчетах с использованием ПЭВМ. Если вначале моделирование начиналось с аппроксимации множества экспериментальных точек на плоскости какой-либо гладкой кривой, то теперь математические модели часто представляют в виде дифференциальных уравнений (в том числе и в частных производных), которыми можно описывать сложные процессы, протекающие в цилиндрах ДВС. В соответствии с определением, данным в [1], модели можно условно подразделять на две группы. Первая группа – теоретические, основанные на общих принципах законов природы. В основу таких моделей могут быть положены законы сохранения энергии, массы рабочего тела в цилиндре двигателя, дифференциальные уравнения

неразрывности, количества движения и др. Вполне естественно, что круг таких моделей достаточно известен. Вторая группа – эмпирические (экспериментальные), типа «черного ящика», когда даже структура об адекватности модели отсутствует. В таких моделях взаимосвязь между входными и выходными параметрами процесса описывается некоторыми операторами, которые описывают реальные процессы. Для таких математических моделей в полной мере подходит определение, данное в работе [2]: *математическая модель – это формальная система, представляющая собой конечное собрание символов и совершенно точных правил оперирования этими символами в совокупности с интерпретацией свойств определенного объекта некоторыми символами, отношениями, константами.*

Действительно, именно интерпретация придает качественный смысл элементам математического выражения, что делает последнее моделью реальных объектов. Можно привести достаточно много примеров эффективных методов математического моделирования, основанных на экспериментальных данных: уравнения И.И. Вибе

закономерностей динамики процесса сгорания в двигателях, разработка прикладных программ при автоматизированном проектировании ДВС [3] и др. Достаточно просмотреть материалы Международных конференций «Двигатель-2007», посвященной 100-летию школы двигателестроения МГТУ им. Н.Э. Баумана, и «Двигатель-2010», посвященной 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана [4, 5], чтобы понять, какое широкое практическое приложение получило использование математических моделей при проектировании и экспериментальной доводке двигателей до заданных показателей. При разработке математической модели всегда стремятся получить ее в виде аналитической функции, которую можно разложить в степенной ряд в окрестностях любой точки из области ее определения. Математическая модель по разработанным методикам (метод крутого восхождения, градиентный метод и др.) позволяет быстро найти оптимальные условия ведения изучаемого процесса и является целью идентификации объекта как в динамическом (когда система или объект выводится из состояния равновесия), так и в статическом (нормальное течение технологического процесса) режимах работы. Математическая модель динамического режима работы объекта – одно или система дифференциальных уравне-

ний; математическая модель статического режима – одно или система алгебраических уравнений.

Умение правильно выбрать математическую модель требует от автора не только необходимых математических, прикладных знаний и опыта, но также вкуса и чувства соразмерности. Поэтому до сих пор нет книг об общих методах построения математических моделей. Наиболее полно разработаны модели с использованием теории математического планирования эксперимента, однако их применение не всегда приводит к желаемым результатам.

Покажем простой пример эмпирических математических моделей, основанный на примере одной из работ [6]. Ввиду краткости статьи приводим пример в усеченной виде.

По данным экспериментальных исследований известно, что при впрыскивании однократной дозы топлива (бензина Аи-93) на поверхность время испарения $\tau_{и}$, мс бензина Аи-93 зависит от цикловой подачи $g_{ц}$, мг, скорости воздушного потока v , м/с и температуры поверхности $t_{п}$, °С. В приведенной ниже таблице в столбцах 1–3 приведены результаты экспериментальных исследований при $t_{п} = 220$ °С, а также $v = 0$ и $v = 26$ м/с. В работе приводится также зависимость для определения $\tau_{и}$, полученная для полного факторного эксперимента:

$$\tau_{и} = 148 + (t_{п}(1,21 v_{в} + 23,5 g_{ц} - 731) + v_{в} (32,1 g_{ц} - 1490) - 3410 g_{ц} + 1,07 t_{п}^2 + 8,97 v_{в}^2 - 77,6 g_{ц}^2) 10^{-3} . \quad (1)$$

Автор [6] указывает, что «расхождение между данными, рассчитанными по уравнению (1), и экспериментальными данными не превышает 18%, что можно считать вполне удовлетворительным для этой сложной области исследования». Заметим, что проверка математической модели на адекватность проводится по критерию Фишера, а кроме того, (1) получена для известного факторного пространства и может использоваться

для определения силы влияния факторов, а также условия опытов. Поэтому вполне естественно, что пользоваться этой моделью даже внутри факторного пространства как аналитической просто невозможно. Об этом свидетельствует погрешность вычисления $\tau_{и}$ по формуле (1) по сравнению с экспериментальными данными (см. столбец (8) в таблице, при этом погрешность превышает указанные 18%).

Зависимость времени испарения бензина Аи-93 от цикловой подачи, мг, и скорости потока v , м/с при $t_{п} = 220$ °С

| Цикловая подача $g_{ц}$, мг | Время испарения $\tau_{и}$, мс при скорости воздушного потока v , м/с | | | | Расчетное значение $\tau_{и}$ по формуле (2) при $v = 0$ | Расчетное значение $\tau_{и}$ по формуле (1) при $v = 0$ | Погрешность вычисления по (1), % |
|------------------------------|--|------|-------|------|--|--|----------------------------------|
| | 0 | 26 | 13 | 6,5 | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 25,0 | 25,0 | 25,0 | 25,0 | 25,5 | 42,2 | 65 |
| 4 | 26,7 | 21,9 | 23,05 | 24,6 | 26,3 | 44,8 | 70 |
| 6 | 28,3 | 21,0 | 24,3 | 25,9 | 27,5 | 46,7 | 70 |
| 8 | 29,4 | 21,1 | 25,2 | 27,3 | 29,1 | 48,1 | 64 |
| 10 | 31,6 | 22,2 | 26,7 | 28,9 | 31,1 | 48,8 | 57 |
| 12 | 34,3 | 24,9 | 29,4 | 31,6 | 33,7 | 48,9 | 44 |
| 14 | 36,5 | 26,1 | 30,8 | 33,2 | 35,9 | 48,5 | 35 |
| 16 | 37,8 | 29,0 | 34,2 | 36,5 | 39,4 | 47,3 | 20 |

Можно показать, что даже для «этой сложной области исследования» можно получить вполне приемлемые математические модели. Действительно, исследователь в состоянии по виду кривой оценить (хотя бы приближенно) уравнение, описывающее систему или процесс (например, в виде полинома n -й степени). Затем необходимо вычислить коэффициенты в найденном уравнении. Как правило, в реальных условиях не существует точных формул, позволяющих вычислить эти коэффициенты. Поэтому на практике используются различные методы поиска коэффициентов, такие как метод координатного спуска, метод сопряженных градиентов, метод наименьших квадратов и т.д. В приведенном примере по данным из таблицы столбцам (1)–(3) зависимости $\tau_{и} = f(g_{и})$ можно аппроксимировать, например, полиномами второй степени типа

$$\tau_{и} = ag_{и}^2 + bg_{и} + c.$$

$$\tau_{и} = (0,0023v + 0,0487)g_{и}^2 + (-0,0637v + 0,1209)g_{и} + (0,0537v + 25,023). \quad (2)$$

В столбце 6 таблицы приведены вычисленные по формуле (2) расчетные значения $\tau_{и}$ при $v = 0$, которые действительно хорошо согласуются с экспериментальными данными (столбец 2), несмотря на то, что часть экспериментальных данных принята нами условно.

Список литературы

1. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложенной математики. – М.: Наука, 1963. – 328 с.
2. Кочубиевский И.Д. Системы нагружения для исследования и испытаний машин. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
3. Элементы системы автоматизированного проектирования ДВС: алгоритмы прикладных программ: учеб. пособие. / Р.М. Петриченко, С.А. Батурин, Ю.Н. Исаков и др.; под общ. ред. Р.М. Петриченко. – Л.: Машиностроение, 1990. – 328 с.
4. Двигатель-2007: сборник научных трудов по материалам Международной конференции, посвященной 100-летию школы двигателестроения МГТУ им. Н.Э. Баумана /

После расчета получим:

для $v = 0$

$$\tau_{и} = 0,0475g_{и}^2 + 0,1495g_{и} + 24,942;$$

для $v = 26$ м/с

$$\tau_{и} = 0,1079g_{и}^2 - 1,5199g_{и} + 26,379.$$

В полученных зависимостях при изменении v меняются только коэффициенты a , b и c . Для вычисления их численных значений не хватает экспериментальных данных. С некоторой долей условности примем, что при скоростях воздуха $v = 6,5$ и 13 м/с характер изменения $\tau_{и}$ будет протекать идентично. Для этого в столбцах 5 и 4 условно поставим $\tau_{и}$ как среднее между известными экспериментальными данными (столбцы 2 и 3) и также аппроксимируем их зависимостями типа. Если после этого найти аналитическую зависимость каждого из коэффициентов a , b и c при изменении скорости потока v , то окончательно получим следующую зависимость:

под ред. Н.А. Иващенко, В.Н. Костюкова, А.П. Науменко, Л.В. Грехова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 572 с.

5. Двигатель-2010: сборник научных трудов по материалам Международной конференции, посвященной 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана // под ред. Н.А. Иващенко, В.А. Вагнера, Л.В. Грехова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 424 с.

6. Драгомиров С.Г. Интенсификация внешнего смесеобразования в автомобильных двигателях с впрыском бензина: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Владимир, 2002. – 38 с.

Рецензенты:

Гаврилов А.А., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Тепловые двигатели и энергетические установки» ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых» Министерства образования и науки, г. Владимир;

Кульчицкий А.Р., д.т.н., профессор, зам. главного конструктора по испытаниям ООО «Владимирский моторно-тракторный завод», г. Владимир.

Работа поступила в редакцию 10.11.2011.