

УДК 519.6 + 539.3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА, ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Ташенова Ж.М., Нурлыбаева Э.Н., Жумадилаева А.К., Кудайкулов А.К.

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,**Астана, e-mail: zhuldyz_tm@mail.ru;**Казахский национальный университет имени К. Сатпаева, Алматы*

В данной работе на основе законов сохранения энергии в сочетании применения сплайн функции в пределах каждого дискретного элемента и минимизации полной тепловой энергии строится разрешающая система линейных алгебраических уравнений, решение которого позволит строить поле распределения температур по длине исследуемого несущего элемента конструкций, оба конца которого жестко защемлены. Часть боковой поверхности теплоизолирована, а на ограниченном участке задана температура, по площадям двух зашпеленных концов несущего элемента. По определенным законам поле распределения строится функционал потенциальной энергии упругих деформаций с учетом наличия поля температур. Далее, минимизируя ее по узловым значениям перемещений, строится вторая разрешающая система уравнений, решение которой позволит строить поле перемещения, составляющих деформаций и напряжений. Разработанный вычислительный алгоритм и метод относительно универсален в смысле возможности численного решения класса установившихся задач термонапряженного состояния несущих элементов конструкции, которые работают при одновременном наличии локальных температур, тепловых потоков, теплообменов и теплоизоляций.

Ключевые слова: тепловые потоки, теплообмены, сохранение энергии, сплайн функции

A NUMERICAL ALGORITHM AND MODELING OF THERMO-STRESSED STATE OF HEAT-RESISTANT ALLOY ROD IN THE PRESENCE OF HEAT EXCHANGE, HEAT INSULATION AND TEMPERATURE CONSTANT INTENSITY

Tashenova Z.M., Nurlybaeva E.N., Zhumadillaeva A.K., Kudaykulov A.K.

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, e-mail: zhuldyz_tm@mail.ru;**Kazakh National Technical University after K.I. Satpaev, Almaty*

In this work on the base of the energy conservation law and application of spline functions in the bounds of each discrete element and minimization of total thermal energy the system of linear algebraic equations was built. The solution of this system allows to construct the temperature distribution field subject to the length of investigated construction element, both ends of which are rigidly restrained, the part of lateral surface is heat insulating and the temperature is known on restricted section. By using the areas of two restricted ends of bearing component, by using the particular laws of distribution fields the potential energy functional of elastic deformations with a glance of existence of temperature field is constructed. Then by minimization it in all local nodal values of movement the second resolution of equation, which solution allows to build the displacement field, the component deformation of tension is determined. Elaborated computational algorithm and approach is relatively universal in the sense of possibility of computational solution of steady problems of thermostressed condition of construction bearing components, which operate in condition of simultaneous existence of local temperature, thermal flows, heat exchange and heat conservation.

Keywords: thermal flows, heat exchange, law of energy conservation, spline functions

Некоторые несущие элементы газотурбинных генераторов, водородных двигателей, парогенераторы атомных реакторов выполняются из специальных жаропрочных материалов. При этом локальные поверхности элементов теплоизолированы, через площади некоторых локальных поверхностей происходит теплообмен с окружающими этими поверхностями средами, а также на определенных локальных участках действуют температуры. В следствие этих несущих элементов возникает сложное термонапряженное состояние. В случае увеличения значений некоторых составляющих деформаций и напряжений больше чем предельных происходит разрушение этих несущих элементов. Поэтому разработка специальных вычислительных алгоритмов, методов

и соответствующих прикладных программ, позволяющих численно исследовать установившееся термонапряженное состояние несущих элементов стратегических конструкций, является актуальной.

Материалы и методы исследования

Материалом несущего элемента конструкций был взят высококачественный жаропрочный сплав АНВ-300. Вычислительный алгоритм и метод исследования ориентированного использования энергетического метода в сочетании с применением аппроксимационных сплайн функций.

Рассмотрим горизонтальный стержень из жаропрочного сплава АНВ-300, ограниченной длины L , см, и постоянного поперечного сечения F , см². Коэффициент теплопроводности материала стержня $K_{\text{ст}}$, Вт/(см·°С), а модуль упругости через E , кГ/см². Оба конца стержня жестко зашпелены. Координатную ось Ox направим слева направо (рис. 1).

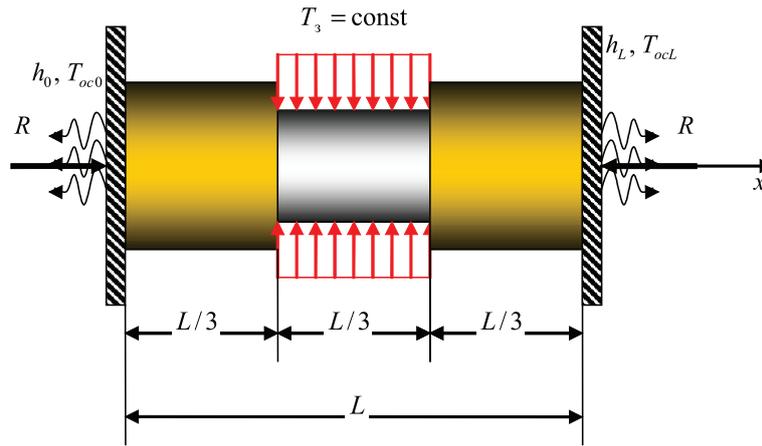


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Через площади поперечных сечений обоих концов происходит теплообмен с окружающими их средами. Коэффициент теплообмена и температура окружающей сред для левого конца h_0 , Вт/(см²·°C) и T_{oc0} , °C. Аналогично для правого конца h_L , Вт/(см²·°C) и T_{ocL} , °C. При этом $h_0, h_L, T_{oc0}, T_{ocL} = \text{const}$.

Боковая поверхность участков $(0 \leq x \leq L/3)$ и $(2L/3 \leq x \leq L)$ (стержня считаем теплоизолированной). На участке $(L/3 \leq x \leq 2L/3)$ стержня дана температура постоянной интенсивности $T_3 = \text{const}$. При наличии вышеприведенных источников тепла и частичной теплоизоляции стержень расширится. Но из-за защемления обоих концов появляются сжимающие

усилия R . В связи с этим и из-за неоднородного поля температуры во внутренних сечениях стержня возникает неоднородное поле напряжения. Составляющие деформаций будут $\epsilon_x, \epsilon_T, \epsilon$, а напряжений $\sigma_x, \sigma_T, \sigma$. Требуется определить поле перемещения $u = u(x)$ упругих деформации ϵ_x , температурных деформации ϵ_T , термоупругих деформаций ϵ , а также упругих, температурных и термоупругих напряжений σ_x, σ_T и σ . Для этого рассматриваемый стержень дискретизируется квадратичными элементами с тремя точками. В пределах каждого дискретного элемента поле температуры перемещения аппроксимируется полными полиномами второго порядка [1].

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = \phi_i(x) \cdot T_i + \phi_j(x) \cdot T_j + \phi_k(x) \cdot T_k \\ u(x) &= a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = \phi_i(x) \cdot u_i + \phi_j(x) \cdot u_j + \phi_k(x) \cdot u_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $0 \leq x \leq l$; l – длина дискретного элемента; узловые значения температуры

$$T_i = T(x=0);$$

$$T_j = T\left(x = \frac{l}{2}\right);$$

$$T_k = T(x=l)$$

для каждого дискретного элемента. Аналогично определяются узловые значения перемещения u_i, u_j, u_k .

$\phi_i(x), \phi_j(x)$, и $\phi_k(x)$ функции формы для квадратного дискретного элемента, которые имеют следующие виды:

$$\begin{aligned} J = & \int_{F(x=0)} \frac{h_0}{2} (T - T_{oc0})^2 dS + \int_{V_1} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{V_2} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \dots + \int_{V_{r_1}} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \\ & + \int_{V_{r_2}} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{V_{r_{2+1}}} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \dots + \int_{V_n} \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{F(x=L)} \frac{hL}{2} (T - T_{ocL})^2 dS, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r_1 = \frac{L}{3l}$; $r_2 = \frac{2L}{3l}$; V_1, V_2, \dots, V_n – объем дискретных элементов; $F(x=0) = F(x=L)$ площадь конечных сечений концов стержня. Далее, минимизируя функционал полной тепловой энергии, по узловым значениям температуры строится разрешающая система линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial T_r} = 0; \quad r \in \left[1, \dots, \frac{L}{3l}; \frac{2L}{3l}, \dots, (2n+1)\right] \quad (4)$$

Решая эту систему уравнений определяется поле распределения температуры по длине стержня

$$T = T(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

где $0 \leq x \leq l$ сначала для каждого дискретного элемента пишется функционал полной тепловой энергии и они суммируются

Далее для каждого элемента пишется выражение функционала потенциальной энергии упругих деформаций с учетом наличия поля температур. Суммировав их по всем дискретным элементам, находим выражение соответствующего функционала для рассматриваемого стержня в целом. Здесь следует отметить, что поле распределения температуры и коэффициента теплового расширения определяются исходя из найденного поля распределения температуры и экспериментальной зависимости $\alpha = \alpha(T(x))$. Далее минимизируя функционал потенциальной энергии других деформаций, по узловым значениям упругих перемещений строится разрешающая система ли-

нейных алгебраических уравнений. При этом, если число дискретных элементов в стержне будет n (где n натуральное положительное число), то число узлов в стержне будет $2n + 1$. Но так как оба конца стержня жестко зашпелены, то перемещение крайних узлов будет равно нулю, т.е. $u_1 = u_{2n+1} = 0$. Поэтому минимизация функционала, характеризующего потенциальную энергию упругих деформаций при наличии поля температур минимизируется по узловым перемещениям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad i = 2 \dots 2n. \quad (6)$$

Решая последнюю систему, находим узловые значения перемещения. Далее по соотношениям Коши и законам Гука определяются значения составляющих ε_x , ε_T , ε , σ_x , σ_T , σ в заданных сечениях стержня. Принимаем за исходные следующие данные:

$$\begin{aligned} L &= 30 \text{ см}; \quad r = 1 \text{ см}; \quad F = \pi \cdot r^2 = \pi \text{ см}^2; \\ K_{xx} &= 100 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}); \quad h_l = 10 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}); \\ T_{oc0} &= T_{ocL} = 40^\circ\text{C}; \quad T = \text{const} = 800^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Результаты исследования и их обсуждение

Целью исследования является разработка вычислительного алгоритма, позволяющего численно исследовать установившееся термонапряженное состояние стержней ограниченной длины выполненных из жаропрочных материалов и находящихся под одновременным воздействием локальной температуры, теплообмена и теплоизоляции.

При фиксированных этих значениях варьируем значением $h_0 = 7,5; 10; 15; 30 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. Сначала принимаем $h_0 = 7,5 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. Поле распределения перемещения, составляющих деформаций и напряжений для $h_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ приводится на рис. 2.

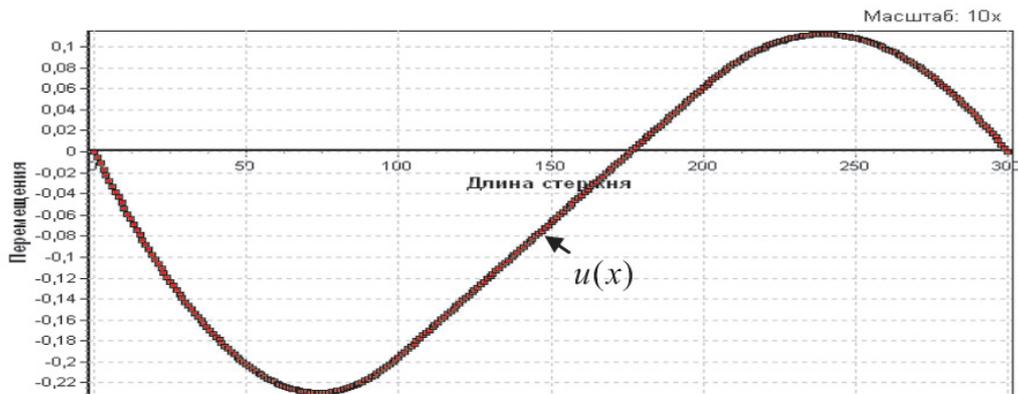


Рис. 2. Поле распределения упругих перемещений по длине стержня для случая $h_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Из этого рисунка видно, что сечения на участке $0 < x < 17,6 \text{ см}$ стержня перемещаются против направления оси Ox . В то время перемещение в сечении, координата которого $x = 17,65 \text{ см}$ будет равно нулю. Наибольшее перемещение против оси Ox соответствует к сечению с координатой $x = 7,3 \text{ см}$. Значение перемещения против направления оси Ox этого сечения равно $u_{7,3} = -0,0229 \text{ см}$. Все сечения стержня, которые находятся на участке $17,6 \leq x < 30 \text{ см}$, перемещаются в направлении оси Ox . При этом наибольшее перемещение соответствует сечению, координата которого $x = 23,9 \text{ см}$. Значение этого перемещения $u_{23,9} = 0,011188 \text{ см}$. Из этой таблицы видно, что $|u_{\min}| > |u_{\max}|$, или конкретно $|-0,0229| > |0,011188|$.

Поле распределения составляющих деформаций и напряжений по длине рассматриваемого стержня приводится на рис. 3. Из рис. 3 видно, что на участках $0 < x \leq 7,25 \text{ см}$ и $23,85 \leq x < L = 30 \text{ см}$ стержня упругая составляющая деформации ведет себя сжи-

мающей. На серединной части она будет иметь растягивающий характер. Остальные составляющие деформации, т.е. ε_T и ε по всей длине стержня будут сжимающими. Из этого же рисунка видно, что ε_T и ε являются симметричными относительно прямой $\varepsilon = 0,0000046x - 0,0072502$.

Поле распределения составляющих компонентов напряжений по длине стержня приводится на рис. 4. Из этого рисунка и таблицы видно, что поведение упругой составляющей напряжения σ_x на участках $0 < x \leq 7,25 \text{ см}$ и $23,85 \leq x < L = 30 \text{ см}$ будет сжимающей. При этом на серединной части стержня $7,25 \leq x < 23,85 \text{ см}$ она ведет себя растягивающей. Остальные обе составляющие напряжения, т.е. σ_T и σ по всей длине стержня будут сжимающими. Кроме того, поле распределения составляющих напряжений σ_x и σ будут симметричными относительно прямой $\sigma = 9,32956x - 14502,066$ [2].

Резюмируя проведенный численный эксперимент, можно построить следующую сравнительную таблицу.

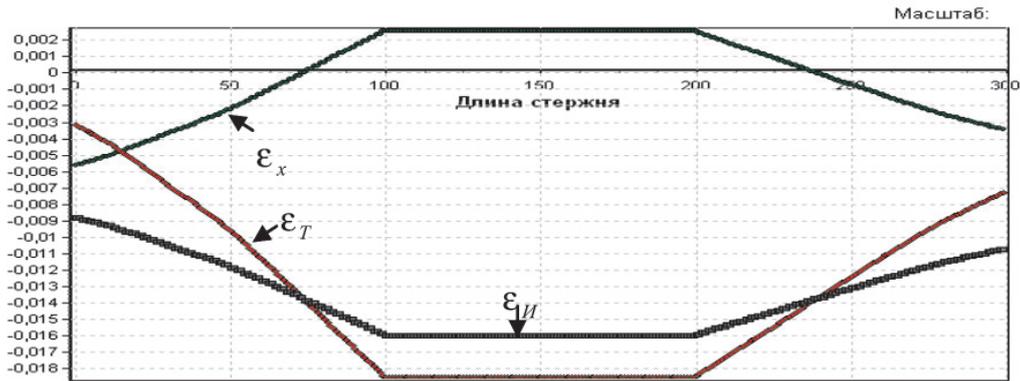


Рис. 3. Поле распределения составляющих деформаций по длине стержня для случая $h_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

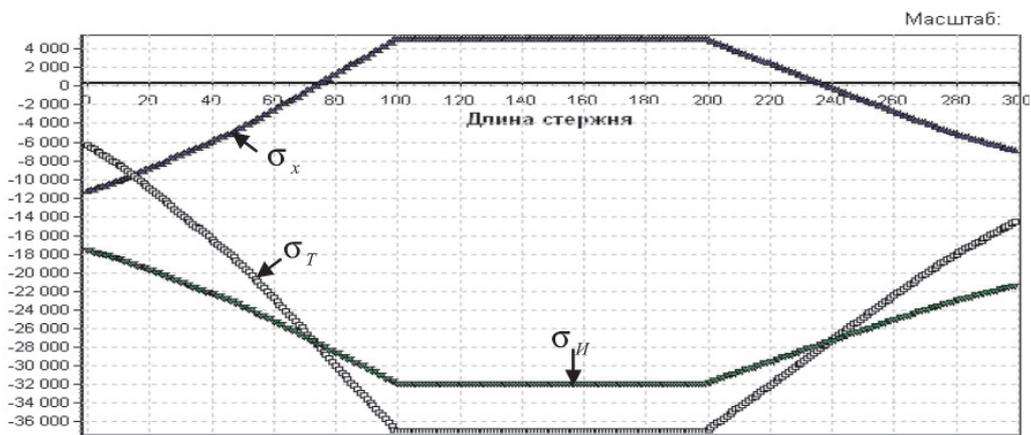


Рис. 4. Поле распределения напряжений по длине стержня $h_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Сравнительная таблица
Влияние коэффициента теплообмена h_0 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$,
на термонапряженно-деформированное состояние исследуемого стержня

№ п/п	h_0 , $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	u_{\min} , см	Координата соответственного сечения, см	u_{\max} , см	Координата соответственного сечения, см	σ_{\max} , кГ/см ²	$\sigma_{\text{ср}}$, кГ/см ²	Координата серединной точки, где $u = 0$, см
1	7,5	-0,0113	$x = 6,6$	0,015	$x = 23,1$	-33166	-29706,25	$x = 14,05$
2	10	-0,01405	$x = 6,7$	0,01405	$x = 23,3$	-32885,9	-29181	$x = 15$
3	15	-0,0177	$x = 7,1$	0,01282	$x = 23,5$	32514,3	-28484,3	$x = 16,295$
4	30	-0,0229	$x = 7,3$	0,011188	$x = 23,9$	-31991	-27503	$x = 17,695$

Заключение

Анализируя эту таблицу, можно сделать следующие выводы:

- при увеличении значения h_0 увеличивается амплитуда перемещений против направления оси Ox ;
- при увеличении значения h_0 , координата сечения, амплитуда перемещения которого будет наибольшим, увеличивается;
- при увеличении значения h_0 , амплитуда перемещения по направлению оси Ox уменьшается;

– при увеличении значения h_0 , максимальное и среднее значения термоупругого напряжения σ уменьшается.

Разработанный вышеизложенный вычислительный алгоритм, метод и комплекс прикладных Delphi программ позволяет провести серии вычислительных экспериментов по численному исследованию термонапряженного состояния несущих элементов конструкций в зависимости от влияния действующих локальных источников тепла различного рода.

Список литературы

1. Кудайкулов А.К. Математическое (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструктивных элементах. – Туркестан: Байтерек, – 2009. – 168 с.
2. Кенжегулов Б.З., Кудайкулов А.К., Мырзашева А.Н. Численное исследование удлинения стержня из жаропрочного сплава с учетом наличия всех видов источников // Известия вузов. – Бишкек, 2009. – №4. – С. 3–7.
3. Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. – М.: Изд. «Промсвещение», 1967.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.
5. Бергер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 568 с.

References

1. Kudaykulov A.K. *Matematicheskoe (konechno-elementnoe) modelirovanie prikladnykh zadach rasprostraneniya tepla v odnomernykh konstruktivnykh elementax*. Turkestan: Bayterek, 2009. 168 p.
2. Kenzhegulov B.Z., Kudaykulov A.K., Myrzhasheva A.N. *Chislennoe issledovanie udlineniya sterzhnya iz zharoprochnogo splava s uchetoм naliчiya vsekh vidov istochnikov* // *Izvestiya vuzov*. – Bishkek, 2009. – №4. – С. 3–7.

splava s uchetoм naliчiya vsekh vidov istochnikov – Izvestiya vuzov. Bishkek, 2009. no. 4. pp. 3–7.

3. Nozdrev V.F. *Kurs termodinamiki*. Izd. «Prosveschenie». M., 1967.
4. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov*, Mir: M., 1979.
5. Berger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost. Ustoichivost. Kolebaniya*. Tom 1, M.: Mashinostroenie, 1968. 568 p.

Рецензенты:

Боранбаев С.Н., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Информационные системы» Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева Министерства образования и науки Республики Казахстан, г. Астана.

Искаков К.Т., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Вычислительная техника» Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева Министерства образования и науки Республики Казахстан, г. Астана.

Работа поступила в редакцию 27.02.2012.