УДК 681.3:007

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ГРУППОВЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ДАННЫМИ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Ромм Я.Е., Иванова А.С.

ФГБОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова», Таганрог, e-mail: romm@list.ru

Излагается метод потоковой вертикальной обработки групп целочисленных слагаемых и сомножителей в режиме с фиксированной точкой, отличающийся исключением операций вычисления переноса. Обработка текущей группы двоичных слагаемых выполняется поразрядно параллельно и ведется до получения промежуточной суммы в двухрядном двоичном коде, которая интерпретируется как результат групповой операции. В случае выполнения операции умножения вертикальной обработке подвергается подлежащий суммированию набор двоичных слагаемых, сформированный в соответствии с умножением по «школьной» схеме. Метод обеспечивает минимизацию временной сложности арифметической обработки потока. Даны оценки роста числового диапазона результатов в зависимости от количества шагов обработки, для реализации метода предлагается концептуальная архитектура параллельного вычислителя. Показано, что вычислительная система при вертикальной обработке без округления может функционировать в течение продолжительного времени с соответственной асимптотической оценкой.

Ключевые слова: компьютерное сложение и умножение, вертикальные групповые операции с фиксированной точкой, потоковая арифметическая обработка, расширение диапазона числовых данных

THE VERTICAL GROUP ARITHMETIC OPERATIONS ON INTEGER DATA WITHOUT CALCULATING THE TRANSFER

Romm Y.E., Ivanova A.S.

Anton Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Taganrog, e-mail: romm@list.ru

A method of processing streaming vertical groups of integral terms, and factors in the fixed-point mode, wherein the operations except the transport calculations. Processing of the current terms of the binary bit-parallel and running is to obtain an intermediate amount in the two-row binary code that is interpreted as the result of the group operation. In the case of the operation of multiplication by the vertical summation of the processing to be subjected to a set of binary terms, formed in accordance with the multiplication of the «school» scheme. The method minimizes the time complexity of the arithmetic processing flow. Estimations of the growth of the numerical range of results depending on the number of processing steps for implementing the proposed conceptual architecture of the parallel compute engine. It is shown that a computer system with a vertical processing without rounding can operate for long periods with the corresponding asymptotic estimate.

Keywords: computer addition and multiplication, vertical group fixed-point operations, streaming arithmetic processing, expanding the range of numerical data

Целью работы является построение и исследование метода выполнения вертикальных групповых арифметических операций над целыми двоичными числами без вычисления переноса на всех шагах вычислений на основе подхода, изложенного в [1]. Рассматривается потоковая обработка вначале слагаемых, затем сомножителей. Вычисления организуются так, чтобы алгоритм обработки был инвариантен относительно веса вертикального среза и числа разрядов операндов, при этом с помощью сохранения промежуточных данных исключается вычисление переноса. В границах минимизации временной сложности арифметической обработки потока требуется выполнить оценки роста числового диапазона данных в зависимости от количества шагов обработки. Для реализации метода предлагается концепция параллельного вычислителя, позволяющего архитектурно ограничить рост числового диапазона.

Вертикальная обработка потока слагаемых. На вход метода подаются двоичные полиномы

$$a_\ell = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j\ell} 2^j; \quad \alpha_{j\ell} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Требуется вычислить сумму

$$S_M = \sum_{\ell=1}^{M} a_\ell,$$

где M – произвольное натуральное, с разбиением на группы по N чисел:

$$S_M = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell + \sum_{\ell=N+1}^{2N} a_\ell + \ldots + \sum_{\ell=\left(\left\lceil \frac{M}{N} \right\rceil - 1\right)N+1}^{M} a_\ell.$$

Выделяется k-я группа слагаемых:

$$A_k = \sum_{\ell=(k-1)N+1}^{kN} a_\ell, \quad (k-1)N + 1 \le \ell \le kN,$$

которая подвергается одному шагу вертикальной обработки. Все операции шага выполняются инвариантно относительно номера разряда двоичных слагаемых, синхронно и взаимно независимо, представляют собой суммирование по вертикали всех коэффициентов j-го разряда всех слагаемых группы $A_k = \sum_{\ell=(k-1)N+1}^{kN} a_\ell$ при каждом j = const. За результат принимается двоичный полином, коэффициенты которого располагаются по диагонали справа налево, сверху вниз согласно их весу (диагональная запись). Диагональная запись по всем разрядам образует промежуточную сумму двоичных полиномов. На шаге $k + 1$ к входному набору слагаемых добавляется промежуточная сумма, полученная на k-м шаге, образуя единый входной набор для выполнения $k + 1$-го шага. В [1] доказана.

Теорема 1. При вычислении суммы S_M посредством рассматриваемого способа для сколь угодно большого M и произвольного N количество $S_1^{(k)}$ промежуточных слагаемых на выходе k-го шага ограничено константой, не зависящей от k, –.

$$\sup_{k\geq 1} S_1^{(k)} \leq \log_2(N+1)+2.$$

При этом на каждом шаге имеет место бесконфликтность распространения всех переносов, которая понимается как невозможность прихода двух единиц переноса в один и тот же разряд одного и того же промежуточного слагаемого.

Оценка и ограничение роста числового диапазона при сложении. С целью ограничения в дальнейшем роста диапазона данных набор полиномов промежуточной суммы рассматривается в качестве входного, к нему применяется тот же прием суммирования, набор сжимается до промежуточной суммы с меньшим числом слагаемых. В силу небольшого значения $S_1^{(k)}$ за малое число повторов данного сжатия промежуточное число слагаемых сжимается до двух, образуя двухрядный код суммы. В [2] доказана

Теорема 2. В условиях теоремы 1 найдется $\tilde{I}$, такое, что для всех $i \geq \tilde{I}$ количество старших разрядов, прирастающих на шаге рассматриваемого метода, не превысит единицы.

Сравнительно малый рост диапазона слагаемых промежуточных сумм можно дополнительно ограничить за счет структуры данных, учитывающей специфику метода. Именно, при отсчете справа налево номеров 0, 1, ..., n разрядов входных слагаемых, те разряды сжатой двухрядной суммы, которые имеют вес больше n, отсоединяются (для подсуммирования в дальнейшем) в отдельный новый массив. Он формируется из отсоединенных двухрядных наборов слагаемых, пополняясь на каждом новом шаге обработки текущего набора входных слагаемых с присоединенной двухрядной промежуточной суммой, и образует матрицу. Когда число строк матрицы сравняется с числом строк текущего входного набора, эта матрица подвергается такой же обработке, как набор A_k. От результата снова отсоединяются старшие разряды в новую матрицу, а старая заполняется по мере шагов обработки новых входных наборов. Обработка ведется параллельно по всем разрядам всех слагаемых всех матриц. Их количество растет, но рост замедляется по весу разрядов аналогично замедлению счетчика при росте единиц измерения.

Физическое замедление роста диапазона в границах предложенной структуры данных показывают следующие оценки. Пусть T_0 – время обработки входного набора из $N + 2$ (с учетом промежуточной суммы) двоичных слагаемых разрядности $n + 1$, пусть $t_1 = T_0$. Тогда время формирования первой матрицы определяется тем, что она заполняется парами по два двоичных слагаемых из отсоединенных старших разрядов за $\sim \frac{N+2}{2}$ суммирований входного набора. Отсюда за $\sim \frac{N}{2}$ суммирований соответственно, за время $t_2 \sim \frac{N}{2}\ T_0$, произойдет заполнение первой матрицы. По индукции переход к общему случаю влечет для заполнения матрицы с номером $k + 1$ оценку времени $t_{k+1} \sim \left(\frac{N}{2}\right)^k T_0$, где $k = 1, 2, ..., M$. Оценка временной сложности T_0 базисного алгоритма с подстановкой в последнее выражение показывает [3], что непрерывная работа параллельного вычислителя, реализующего данный способ в формате с фиксированной точкой, возможна без округления в течение многих лет.

Вертикальная обработка потока сомножителей. На основе рассматриваемого метода вертикального суммирования организуется умножение неограниченного потока двоичных сомножителей без вычисления переноса. Сформированная по «школьной» схеме умножения матрица слагаемых для двух двоичных сомножителей подается на вход изложенного метода, который применяется к данному набору слагаемых и формирует на выходе промежуточную (не вычисленную) сумму полноразрядных двоичных слагаемых. Умножение на следующий сомножитель выполняется по дистрибутивности. Процесс воспроизводится для каждого сомножителя потока. Пусть требуется найти произведение

$$P_M = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_M,$$

где все сомножители заданы и имеют вид

$$a_l = \sum_{j=0}^{n} a_{jl} 2^j; \quad a_{jl} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

M выбрано произвольно. Шаг с номером k поразрядно-параллельного вертикального суммирования ставится в соответствие k-му умножению вида

$$a^{(0)} = a_1, \quad a^{(1)} = a^{(0)} \times a_2, \ldots,$$

$$a^{(k)} = a^{(k-1)} \times a_{k+1}; \quad k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Для данного шага формируется k-я «школьная» схема (образуемая умножением первого сомножителя на текущий разряд второго с соответственным весу сдвигом на разряд влево). Набор двоичных слагаемых, сформированный по этой схеме, принимается за входной набор для k-го шага описанного выше метода вертикального группового сложения. За результат сложения принимается k-й промежуточный набор слагаемых, который интерпретируется как результат k-го произведения. В [1] доказана.

Теорема 3. При вычислении рассматриваемым способом P_M для сколь угодно большого M и произвольного числа разрядов $n + 1$ количество $S_1^{(k)}$ слагаемых k-го промежуточного набора ограничено константой, не зависящей от k, –

$$\sup_{k \ge 1} S_1^{(k)} \le \log_2 n + \log_2 \log_2 (2n+2) + 2.$$

При этом на каждом шаге имеет место бесконфликтность распространения всех переносов.

Отсюда за малое число шагов промежуточная сумма может быть сжата до двух слагаемых.

Оценка роста числового диапазона при умножении. Ниже приводятся оценки роста числа разрядов произведения в зависимости от числа сомножителей и соответственно числа шагов умножения. В [4] даны доказательства утверждений, приводимых в качестве основы для изложения способа выполнения операций с фиксированной точкой без округления. Пусть правая часть неравенства из теоремы 3 обозначена $\tilde{S}_1$. Справедлива

Теорема 4. Начиная с некоторого номера шага $k = k_1$ рассматриваемого метода вертикального умножения, прирост $\tilde{P}_1$ числа разрядов по отношению к начальному шагу будет удовлетворять неравенству:

$$\tilde{P}_1 \le \sum_{i=1}^{k_1} \underbrace{\log_2 \log_2 \ldots \log_2}_{i} \tilde{S}_1 + kn + 1, \ \forall k \ge k_1.$$

Следствие 1. Суммарный прирост P_2 числа разрядов по i шагам сжатия текущего входного набора до двухрядного кода имеет оценку .

$$P_2 \le 1 + \sum_{l=1}^{i} \left(1 + \underbrace{\log_2 \log_2 \ldots \log_2 \tilde{S}_1}_{l} \right).$$

Сумма справа конечна, поскольку сжатие продолжается только до двухрядного кода: $i \le I$, при котором

$$\underbrace{\log_2 \log_2 \ldots \log_2 \tilde{S}_1}_{I} < 3.$$

С учетом того, что на каждом шаге умножения «школьная» схема увеличивает число разрядов входного набора на n, имеет место [4]

Теорема 5. Суммарное число P_3 разрядов по всем J шагам рассматриваемого метода умножения при сжатии каждого входного набора до двух промежуточных слагаемых оценивается из неравенства: $P_3 \le J(n + P_2)$, где P_2 оценивается согласно следствию 1.

Для дальнейшего уточняется общее число разрядов произведения и прирост числа разрядов по шагам. Пусть снова рассматриваются $\le \tilde{S}_1 \times (n+1)$ слагаемых входного набора, и в них выделены те старшие разряды, которые соответствуют сдвигу сомножителя на n разрядов влево на каждом шаге формирования набора «школьных» схем умножения. В результате первого шага рассматриваемого вертикального суммирования от старшего из выделенных разрядов возникнет прирост P количества старших разрядов, удовлетворяющий (в силу диагональной записи суммы вертикального среза) неравенству: $P \le \log_2 \tilde{S}_1$. Очевидно, от разряда, предшествующего старшему, прирост составит $P \le \log_2 (2\tilde{S}_1) - 1$. По индукции, от разряда, предшествующего старшему на i разрядов вправо, получится прирост: $P \le \log_2 ((i+1)\tilde{S}_1) - i$, тем более, $P \le \log_2 (2^i \tilde{S}_1) - i$. В результате прирост числа разрядов в отсчете от любого разряда, предшествующего старшему разряду входного набора, всегда оценивается из неравенства $P \le \log_2 \tilde{S}_1$. Количество $\tilde{S}_2$ слагаемых промежуточной суммы, получивших рассмотренный прирост, аналогично, оценивается из неравенства: $\tilde{S}_2 \le \log_2 \tilde{S}_1$.

Пусть выполняется сжатие промежуточной суммы до двухрядного кода. Тогда на втором шаге сжатия роль $\tilde{S}_1$ по отношению к приросту разрядности будет играть $\tilde{S}_2$ из предыдущего неравенства, поэтому $P \le \log_2 \log_2 \tilde{S}_1$. Для шага с номером $k \ge 2$ по индукции оправдывается оценка $P \le \underbrace{\log_2 \log_2 \ldots \log_2 \tilde{S}_1}_{k}$, где начиная с некоторого $k_0 = \text{const}$, для всех $k \ge k_0$ правая часть не превзойдет единицы. Отсюда вытекает

Лемма 1. В рассматриваемом способе умножения $\exists k_0 = \text{const}$ такое, что прирост $\tilde{P}$ числа разрядов, отсчитываемый от старшего разряда текущих слагаемых на входе k-го шага сжатия, удовлетворяет неравенству: $\tilde{P} \le 1,\ \forall k \ge k_0$.

Поскольку входной набор умножения формируется по дистрибутивности относительно слагаемых промежуточной суммы, то к рассмотренному приросту добавляется n разрядов сдвига вследствие структуры «школьной» схемы. Отсюда с учетом леммы 1 вытекает

Теорема 6. В рассматриваемом способе умножения с двухрядной промежуточной суммой $\exists k_0 = \text{const}$ такое, что общий прирост $\tilde{P}_0$ числа разрядов на шаге умножения оценивается из неравенства: $\tilde{P}_0 \le n+1$, $\forall k \ge k_0$.

Оценка теоремы 6 сопоставима с приростом числа разрядов обычного умножения с распространением переноса, однако рассмотренный метод исключает вычисление переноса и параллелен по всем разрядным срезам.

Концептуальная архитектура параллельного вычислителя. Для реализации потокового выполнения рассмотренных операций возможна следующая структура параллельного процессора.

С учетом предложенной выше структуры данных для группового сложения каждый этап сжатия текущей матрицы отделенных двухрядных слагаемых предлагается выполнять на сопоставленной именно этой матрице группе процессорных элементов (ПЭ). При этом каждый ПЭ сопоставляется одному и только одному разряду слагаемых и выполняет вертикальное суммирование одноразрядных чисел столбца матрицы с зафиксированным разрядным срезом. Поразрядно-параллельная работа ПЭ синхронно продолжается до сжатия слагаемых матрицы в двухрядный код промежуточной суммы. В результате параллельной по всем матрицам и всем разрядным срезам работы ПЭ процесс обработки старших разрядов будет замедляться пропорционально замедлению выхода старших разрядов при переходе от i-й к i + 1-й матрице. При этом обработка всех входных слагаемых потока будет происходить в темпе поступления и суммирования непосредственно самого входного набора.

Для выполнения вертикального умножения на параллельном процессоре с данной структурой предлагается следующая модификация обработки. Умножение каждой не просуммированной пары двоичных чисел двухрядного кода текущего произведения будет выполняться на взаимно однозначно сопоставленных разрядным срезам ПЭ: i-й справа налево разрядный срез обрабатывается i-м ПЭ. После формирования по дистрибутивности «школьных схем» изложенным способом выполняется поразрядно-параллельное вертикальное суммирование, синхронно продолжающееся до сжатия промежуточной суммы в двухрядный код. В отличие от матричной структуры, использованной для сложения, умножение на новый сомножитель двухрядного кода текущего произведения реализуется, как если бы каждый такой двухрядный код был преобразован в линейный массив с сохранением позиционной записи двоичного числа.

В линейных алгоритмах изложенный способ как в случае сложения, так и при умножении отличается тем [5, 6], что не предполагает вычисления переноса и выполнения округления. Распространение способа на бинарные полноразрядные операции рассматривается в [7, 8], на этой основе предложенная архитектура вычислителя может быть модифицирована для реализации алгоритмов с ветвлениями.

Заключение

Изложен метод вертикального поразрядно-параллельного сложения и умножения потока целых двоичных чисел, отличающийся тем, что в качестве результата используется не вычисленная промежуточная сумма в виде двухрядного кода, при этом не требуется выполнять вычисление переноса. Даны оценки роста разрядности результатов сложения и умножения. На основе инвариантности обработки всех разрядов рассматриваемые групповые операции допускают реализацию с помощью поразрядно-параллельно работающих процессорных элементов. В случае реализации линейных алгоритмов не предполагается выполнять округление, и за счет параллелизма может достигаться существенное повышение точности арифметической обработки.

Список литературы

1. Ромм Я.Е. Метод вертикальной обработки потока целочисленных групповых данных. I. Групповые арифметические операции // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 3. – С. 123–151.
2. Ромм Я.Е., Иванова А.С. Потоковая вертикальная арифметическая обработка целочисленных двоичных кодов с фиксированной точкой / ТГПИ. – Таганрог, 2011. – 56 с. Деп. В ВИНИТИ 19.07.2011, № 350-В2011.
3. Ромм Я.Е., Иванова А.С. Метод расширения числового диапазона при вертикальной арифметической обработке // Известия ЮФУ. Техн. науки. Тематический выпуск «Методы и средства адаптивного управления в электроэнергетике». – 2012. – № 2. – С. 35–42.
4. Ромм Я.Е., Иванова А.С. Оценка числового диапазона, архитектура параллельного процессора и компьютерное моделирование вертикального умножения без вычисления переноса / ТГПИ. – Таганрог, 2012. – 28 с. Деп. В ВИНИТИ 14.02.2012, № 68-В2012.
5. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника: учебное пособие для вузов. – 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 782 с.
6. Гусев В.Г. Электротехника и микропроцессорная техника: учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 2006. – 800 с.
7. Ромм Я.Е. Метод вертикальной обработки потока целочисленных групповых данных. II. Приложение к бинарным арифметическим операциям // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. – С. 146–162.
8. Ромм Я.Е. Метод вертикальной обработки потока целочисленных групповых данных. III. Приложение к бинарным арифметическим операциям // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 152–165.

References

1. Romm Ya.E. Vertical processing of integer group-data streams I. Group arithmetic operations // Cybernetics and Systems Analysis. 1998. no. 3. pp. 123–151.
2. Romm Ya.E., Ivanova A.S. Streaming vertical integer arithmetic processing of binary codes with a fixed point / Taganrog State Pedagogical Institute. Taganrog, 2011. 56 p. Dep. In VINITI 19.07.2011, no. 350-2011.
3. Romm Ya.E., Ivanova A.S. The method of expansion of a numerical range at vertical arithmetic treatment // Proceedings of the SFU. Tech. science. Special Issue «Methods and tools for adaptive management in the electricity», 2012. no. 2 pp. 35–42.
4. Romm Ya.E., Ivanova A.S. Score a numeric range, the architecture of parallel processor computer simulation of vertical multiplication without computing the transfer / Taganrog State Pedagogical Institute. Taganrog, 2012. 28 p. Dep. In VINITI 14.02.2012, no. 68-2012.
5. Ugryumov E.P. The digital circuitry. Textbook for high schools. Izd.2: BHV-Petersburg, 2004. 782 p.
6. Gusev V.G. Electrical Engineering and Microprocessor Technology: The textbook for high schools. M.: High School, 2006. 800 p.
7. Romm Ya.E. Vertical processing of integer group-data streams II. Application to binary arithmetic operations // Cybernetics and Systems Analysis. 1998. no. 6. pp. 146–162.
8. Romm Ya.E. Vertical processing of integer group-data streams III. Application to binary arithmetic operations // Cybernetics and Systems Analysis. 1999. no. 1. pp. 152–165.

Рецензенты:

Турулин И.И., д.т.н., профессор кафедры АСНИиЭ ТТИ ЮФУ, г. Таганрог;

Карелин В.П., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой математики и информатики ТИУиЭ, г. Таганрог;

Бичурин М.И., д.ф.-м.н., зав. кафедрой проектирования и технологии радиоаппаратуры Новгородского государственного университета, г. Великий Новгород.

Работа поступила в редакцию 18.06.2012.