УДК 656.02 + 351.811.12

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В УЗЛАХ СЕТИ

Наумова Н.А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, Краснодар, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Предложена вероятностная модель транспортного потока, базирующаяся на гипотезе о распределении интервалов по времени между подряд идущими автомобилями по закону Эрланга, который позволяет описывать потоки высокой плотности. Разработано граф-представление модели, а также приведена структура матриц, хранящих всю необходимую информацию о потоках на сети для аналитической реализации модели. Приведена классификация узловых точек сети. Предложены критерии оптимизации распределения потоков в узлах сети. Разработан алгоритм численного решения задачи определения оптимальных параметров регулирования для узловой точки II типа. С учетом граф-представления модели предложен методы определения оптимальной (из числа заданных) схемы распределения потоков по сети. Предлагаемая модель, ее граф-представление и методы решения оптимизационных задач могут быть применены не только к автотранспортной сети, но и к любой сетевой структуре при надлежащем выборе способа определения параметров распределения Эрланга.

Ключевые слова: транспортная сеть, сетевые потоки, математическая модель, граф-представление, узловая точка, оптимизация

PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF FLOWS DISTRIBUTION IN THE NETWORK NODES

Naumova N.A.

Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

The purpose of this article is to provide a stochastic model of network flows based on the Erlang time distribution for vehicles moving in succession, which allows us to describe the flows of high density. We used a graph representation and introduced a structure of matrices и to store all necessary information about the network flows for analytical modelling. In this paper, the classification of network nodes is given as well as the criteria of optimization of flows distribution in the network nodes. We provide an algorithm of numerical method to find out the optimal parameters of control for the type 2 node. Using the graph representation of the model, we developed methods of determination of the optimal scheme of flows distribution within the network. The model provided – its graph representation and methods of optimization problems solutions – could be applied not only to a motor transport network but to any other network if we use a proper method of determining parameters based on the Erlang distribution.

Keywords: transportation network, network flows, mathematical model, graph representation, node, optimization

Стремительный рост числа автовладельцев привел к значительному повышению объемов движения, частым транспортным заторам и увеличению себестоимости автомобильных перевозок. В связи с этим проблема рационального использования существующей улично-дорожной сети путем выбора оптимальной организации движения автотранспортных средств является очень актуальной.

Для эффективного управления потоками транспортной сети города и выбора оптимальных решений по проектированию транспортных сетей необходимо учитывать широкий спектр характеристик потока. Возникающие трудности связаны с нестабильностью транспортного потока и противоречивостью критериев качества управления движением. Время проезда по конкретному маршруту складывается из задержек на перекрестках и времени движения между перекрестками. Оптимизировать время движения между двумя пунктами улично-дорожной сети можно за счет сокращения потерь времени на перекрестках. Перспективной задачей является разработка микромодели транспортной динамики в узлах сети и оценка их влияния на распределение потоков по сети.

Представление транспортной сети в виде графа

Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число. Поток на графе – это некоторая функция, заданная на дугах графа. В нашем случае поток на графе задается в виде функции плотности распределения интервалов по времени между требованиями. Будем считать распределение интервалов по времени в каждом из потоков требований (каналов) подчиненным распределению Эрланга:

$$f^{(k)}(t) = \lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} \big/ (k-1)! \quad (t > 0). \qquad (1)$$

Этот закон позволяет описывать потоки достаточно высокой плотности. В частности, для транспортных потоков гипотеза о распределении интервалов по времени между подряд идущими автомобилями по закону Эрланга подтверждается при интенсивности движения по каждой полосе до 500 авт./ч.

Назовем сетевые потоки неконфликтными, если на данном участке сети они не пересекаются, и конфликтными – в противном случае. Вершинами графа будем считать узловые точки – точки, в которых либо расположены источники или потребители информации, либо происходит пересечение конфликтных потоков. То есть узловые точки образуются пересечением многоканальных магистралей.

Рассмотрим узловую точку (УТ), в которой пересечение конфликтных потоков происходит следующим образом: одна часть потоков (назовем их главными) проходит через УТ беспрепятственно; требования второй части потоков (второстепенных) ожидают возникновения достаточных интервалов по времени между требованиями главных потоков для пересечения УТ. Назовем такую УТ узловой точкой первого типа (УТ I типа).

Узловую точку (УТ), в которой для возможности ее пересечения поочередно перекрывается движение для одной из групп неконфликтных потоков на фиксированное время T_c, назовем узловой точкой второго типа (УТ II типа).

Пусть $\{l_i\}$ – множество дуг графа, $\{z_i\}$ – множество вершин (узловых точек). Дуга представляет собой часть многоканальной магистрали, заключенную между двумя вершинами (узловыми точками). Присвоим магистралям сети идентификационные номера WAY_i, $i \in N$. В этом случае

$$STREET\_i = \bigcup_{j \in W} l_j.$$

Тогда можно представить граф с помощью следующих связанных матриц:

$$\textbf{I.}\, A_{STREETS} = \left(S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad Contr \quad \mathrm{Pr} \quad Len \quad Col\; AL\; AS\; AR \quad \lambda A1 \quad kA1 \ldots \quad BL\; BS\; BR \quad \lambda B1 \quad kB1 \ldots\right)$$

1) № – номер строки матрицы $A_{STREETS}$ соответствует номеру дуги графа, соединяющей узловые точки I и II; количество строк соответствует количеству дуг графа;

2) S_1 и S_2 – пересекающиеся магистрали, образующие вершину I графа;

3) S_3 и S_4 – пересекающиеся магистрали, образующие вершину II графа;

4) *Contr* – тип узловой точки;

5) *Pr* – наличие приоритета (главная или второстепенная магистраль);

6) *Len* – длина дуги между узловыми точками;

7) *Col* – количество потоков на дуге;

8) *AL* – допустимость поворота налево из направления A в вершине II;

9) *AS* – допустимость движения прямо из направления A вершине II;

10) *AR* – допустимость поворота направо из направления A вершине II;

11) $\lambda A1$, $\lambda A2$ и т.д. – параметр λ в направлении A;

12) $kA1$, $kA2$ и т.д. – параметр k в направлении A;

13) *BL* – допустимость поворота налево из направления B вершине I;

14) *BS* – допустимость движения прямо из направления B вершине I;

15) *BR* – допустимость поворота налево из направления B вершине I;

16) $\lambda B1$, $\lambda B2$ и т.д. – параметр λ в направлении B.

17) $kB1$, $kB2$ и т.д. – параметр k в направлении B.

$$\textbf{II.}\; B_{INTERSECTION} = \left(S_1 \quad S_2 \quad \lambda Cline1 \quad kCline1 \quad \ldots \quad \lambda Dline1 \quad kDline1 \quad \ldots\right)$$

1) № строки совпадает с номером дуги графа, соединяющей узловые точки I и II в матрице $A_{STREETS}$;

2) $S1$ и $S2$ – пересекающиеся магистрали, образующие вершину I графа;

3) $\lambda Cline1$, $\lambda Cline2$ и т.д. –параметр λ потоков, входящих в вершину I в направлении C магистрали, пересекающей данную дугу графа в узловой точке I;

4) $kC\ line1$, $kC\ line2$ и т.д. – параметр k потоков, входящих в вершину I в направлении C магистрали, пересекающей данную дугу графа в узловой точке I;

5) $\lambda D\ line1$, $\lambda D\ line2$ и т.д. – параметр λ потоков, входящих в вершину I в направлении D магистрали, пересекающей данную дугу графа в узловой точке I;

6) $kD\ line1$, $kD\ line2$ и т.д. – параметр k потоков, входящих в вершину I в направлении D магистрали, пересекающей данную дугу графа в узловой точке I.

Определение оптимального распределения потоков в узловой точке

Рассмотрим следующую задачу: определить оптимальное (из множества

$$\Psi = \{\lambda A, kA, \lambda B, kB, \lambda C, kC, \lambda D, kD, Contr, Prior\}$$

известных способов) распределение потоков для данной вершины $z_n = Str1 \cap Str2$.

Критерием оптимизации, в зависимости от преследуемой цели, может служить:

1) $\vec{\mu}(z_n)$ – вес вершины z_n (узловой точки) для потока данного направления;

2) $\mu(z_n)$ – вес вершины z_n (узловой точки);

3) $\omega_M(z_n)$ – средняя задержка требования выбранных направлений.

Для узловой точки I типа:

1) $\vec{\mu}(z_n)=\sum_{i\in M}\frac{\frac{\lambda i}{ki}W_{Hi}}{3600}$, где M – множество выбранных направлений;

2) $\mu(z_n)=\sum_{i\in \Omega}\frac{\frac{\lambda i}{ki}W_{Hi}}{3600}$, где Ω – множество всех направлений;

3) $\omega_M(z_n)=\frac{\sum_{i\in M}\left(\frac{\lambda i}{ki}\cdot W_{Hi}\right)}{\sum_{i\in M}\frac{\lambda i}{ki}}$, где M – множество выбранных направлений.

Здесь принято обозначение: $W_{н}$ – средняя задержка (в секундах) в УТ одного требования второстепенного направления в потоке с параметрами распределения λ *и* k:

Для узловой точки II типа:

1) $\vec{\mu}(z_n)=\frac{\sum_{i\in M}W(T_a,\lambda_i)}{T}$, где M – множество выбранных направлений, $a\in\{1;2\}$;

2) $\mu(z_n)=\frac{\sum_i W(T_1,\lambda_i)+\sum_j W(T_2,\lambda_j)}{T}$;

3) $\omega_M(z_n)=\frac{\sum_{i\in M}W(T_a,\lambda_i)}{\sum_{i\in M}H\left(T_a,\lambda_i\right)}$, где M – множество выбранных направлений, $a\in\{1;2\}$.

Здесь приняты обозначения:

$W(T_i,\lambda)=\int_0^{T_1}H_\lambda(t)dt$ (треб.·с.) – суммарная задержка всех требований данного потока за один цикл регулирования $T=T_1+T_2$;

$H(t)$ – число требований, прибывающих к данной точке дороги за интервал времени $(0;t)$.

Пусть задана вершина $z_n=Str1\cap Str2$ (с точностью до порядка $Str1$ и $Str2$). Информация о входящих потоках содержится в матрицах $A_{STREETS}$ и $B_{INTERSECTION}$.

Лемма 1. Параметры распределения Эрланга, входящих в вершину $z_n=Str1\cap Str2$ потоков, заданы:

1) в матрице $A_{STREETS}$ в строке $\left(A_{STREETS}\right)_i=\left(Str1\quad Str2\quad Str1\quad X\quad ...\right)$ – направление B;

2) в матрице $B_{INTERSECTION}$ в строке $(B_{INTERSECTION})_i$ в направлениях C и D;

3) в матрице $A_{STREETS}$ в строке $\left(A_{STREETS}\right)_j=\left(Str1\quad Y\quad Str1\quad Str2\quad ...\right)$ – в направлении A.

Оптимальное распределение потоков в узловой точке является решением задачи (в зависимости от преследуемой цели):

1) $\vec{\mu}(z_n)\_opt=\min_{\Psi}\{\vec{\mu}(z_n)\}$;

2) $\mu(z_n)\_opt=\min_{\Psi}\{\mu(z_n)\}$;

3) $\omega_M(z_n)\_opt=\min_{\Psi}\{\omega_M(z_n)\}$.

Выбор оптимальных параметров регулирования для узловой точки II типа

Поставим следующую задачу оптимизации функционирования узловой точки II типа: минимизировать суммарную часовую задержку $\mu(z_n)$ всех требований в данном узле. При этом для каждого потока должно выполняться условие отсутствия затора:

$$H(T,\lambda_i)-\frac{T_2}{h}\le 0,\quad i=1,2,...,n1;\quad (2)$$

$$H(T,\lambda_j)-\frac{T_1}{h}\le 0,\quad j=1,2,...,n2,\quad (3)$$

где $n1$ – число потоков магистрали № 1; $n2$ – число потоков магистрали № 2. Кроме этого необходимо выполнение условия: $T\ge 2M$, где M – минимальное время (в секундах), необходимое требованию для пересечения узловой точки II типа.

Задача математического (нелинейного) программирования имеет вид:

$$Z=\frac{\sum_i W(T_1,\lambda_i)+\sum_j W(T_2,\lambda_j)}{T}\to\min;\quad (4)$$

$$\Omega:\quad\begin{cases}H(T,\lambda_i)-\frac{T_2}{h}\le 0,\\ H(T,\lambda_i)-\frac{T_1}{h}\le 0,\\ T\ge 2M,\\ T_1+T_2=2M.\end{cases}\quad (5)$$

В результате следует получить оптимальные значения параметров регулирования T_1, T_2.

Алгоритм численного решения задачи (4–5) зададим как релаксационный процесс – процесс построения последовательных приближений M_1, M_2, ..., M_k, ... таких, что $M_i \in \Omega$ и $Z(M_{k+1}) < Z(M_k)$.

1-й шаг. Задаем начальные значения:

$$p^* = \frac{\sum_j \frac{\lambda_j}{k_j}}{\sum_i \frac{\lambda_i}{k_i} + \sum_j \frac{\lambda_j}{k_j}}$$

и

$$T^* = \min_{i,j} \left\{ -\frac{(1-k_i)\big/ 2k_i}{\left(\frac{\lambda_i}{k_i} - \frac{1-p}{h}\right)}; -\frac{(1-k_j)\big/ 2k_j}{\left(\frac{\lambda_j}{k_j} - \frac{p}{h}\right)} \right\};$$

и значения для завершения алгоритма $\varepsilon_p = 0{,}01$; $\varepsilon_T = 0{,}5$; $\varepsilon_Z = 0{,}1$.

2-й шаг. Находим численно (например, методом половинного деления) решение уравнения $H(T, \lambda_i) - \frac{(1-pT)}{h} = 0$, соответствующего условию $\min_i \left\{ \frac{\lambda_i}{k_i} \right\}$.

3-й шаг. Проверяем выполнение остальных неравенств системы ограничений:

$$H(T^{*1}, \lambda_i) - \frac{(1-pT^{*1})}{h} \le 0, \; i = 1, 2, ..., n1;$$

$$H(T^{*1}, \lambda_j) - \frac{pT^{*1}}{h} \le 0, \; j = 1, 2, ..., n2.$$

4-й шаг. Если условия шага 3 выполнены, вычисляем $Z^*(p^*_{}; T^{*1})$ и переходим к шагу 5.

Если условия шага 3 не выполнены, то находим численно (например, методом половинного деления) решение T^{*1} уравнения $H(T, \lambda_j) - \frac{pT}{h} = 0$, соответствующего условию $\min_j \left\{ \frac{\lambda_j}{k_j} \right\}$; проверяем выполнение остальных неравенств системы ограничений:

$$H(T^{*1}, \lambda_i) - \frac{(1-pT)^{*1}}{h} \le 0, \; i = 1, 2, ..., n1;$$

$$H(T^{*1}, \lambda_j) - \frac{pT^{*1}}{h} \le 0, \; j = 1, 2, ..., n2.$$

Затем вычисляем $Z^*(p^*; T^{*1})$ и переходим к шагу 5.

5-й шаг. Приняв $T = T^{*1}$ (начальное значение $T_1^{*0} = p^* \cdot T^{*1}$) находим численно решение T_1^* уравнения:

$$\frac{\partial Z}{\partial T_1} = 0;$$

$$T_1 \cdot \left(\sum_i \left(\frac{\lambda_i}{k_i} \right) + \sum_j \left(\frac{\lambda_j}{k_j} \right) \right) - T \cdot \sum_j \left(\frac{\lambda_j}{k_j} \right) + \sum_i \frac{1-k_i}{2k_i} + \sum_i R_{1i} - \sum_j \frac{1-k_j}{2k_j} + \sum_j \frac{\partial \tilde{R}_{2j}}{\partial T_1} = 0.$$

Тогда новое значение $p^{*1} = \frac{T_1^*}{T^{*!}}$.

6-й шаг. Повторяем шаги 2–4 до тех пор, пока $\Delta Z < \varepsilon_z$, $\Delta p < \varepsilon_p$, $\Delta T < \varepsilon_T$.

Автором доказано, что последовательные приближения отвечают условиям сходимости к оптимальному решению M_0:

$$\lim_{k \to \infty} Z(M_k) = Z(M_0) \quad .$$

Определение критических значений параметров распределения Эрланга для узловой точки II типа

Как отмечено выше, «затор» в УТ II типа не образуется при выполнении условий (2–3). В случае распределения интервалов по времени по закону Эрланга (1) данные условия равносильны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_i}{k_i} T + \frac{1-k_i}{2k_i} + R_i(\lambda_i, k_i, t) \le \frac{T_2}{h}, & i = 1, 2, ..., n1 \\ \frac{\lambda_j}{k_j} T + \frac{1-k_j}{2k_j} + R_j(\lambda_j, k_j, t) \le \frac{T_1}{h}, & j = 1, 2, ..., n2 \end{cases} \qquad (6)$$

Так как

$$\frac{1}{4} \le \left| R(\lambda, k, t) \right| \le \frac{1}{2k \cdot \sin \frac{\pi}{k}},$$

то приближенное решение системы относительно параметра λ (при известном параметре k) следующее:

$$\begin{cases} \lambda_i < \dfrac{\left(\dfrac{T_2}{h} + \dfrac{k_i - 1}{2k_i} - \dfrac{1}{2k_i \cdot \sin \dfrac{\pi}{k_i}} \right) \cdot k_i}{T}, \quad i = 1, 2, ..., n1 \\ \lambda_j < \dfrac{\left(\dfrac{T_1}{h} + \dfrac{k_j - 1}{2k_j} - \dfrac{1}{2k_j \cdot \sin \dfrac{\pi}{k_j}} \right) \cdot k_j}{T}, \quad j = 1, 2, ..., n2 \end{cases} \tag{7}$$

При необходимости значение параметра λ распределения Эрланга для каждого из потоков, гарантирующее отсутствие «заторов» в УТ II типа, может быть найдено численными методами с любой степенью точности путем решения (соответственно) уравнения:

$$H(T, \lambda_i) - \frac{T_2}{h} = 0$$

или

$$H(T, \lambda_j) - \frac{T_1}{h} = 0. \tag{8}$$

Определение оптимальной (из числа заданных) схемы распределения потоков по сети

Пусть задан подграф $\{z_n\}_{n \in V}$, подлежащий реорганизации. Возможные варианты реорганизации распределения потоков на сети должны быть отражены в матрицах $(A_{STREETS})_i$ и $(B_{INTERSECTION})_i$, $i \in K$.

Если цель реорганизации – сведение к минимуму задержек в узловых точках, то критерий оптимизации – сумма весов узловых точек:

$$\mu_i \left(\{z_n\}_{n \in V} \right) = \sum_{n \in V} \mu_i(z_n).$$

Оптимальная схема распределения потоков по сети является решением задачи:

$$\mu\_opt = \min_i \left\{ \sum_{\substack{n \in V \\ i \in K}} \mu_i(z_n) \right\}.$$

Если цель реорганизации – оптимизация движения потоков по данному маршруту (V, D) сети, то в качестве целевой функции следует взять

$$\mu_i(WAY(z_0, z_p)) = \sum_{\substack{i \in K \\ n \in V \\ j \in D_i}} \left(\bar{\mu}_i(z_n) + \mu_i(l_j) \right)$$

– вес маршрута, то есть время, затраченное на прохождение данного маршрута.

Здесь $\bar{\mu}_i(z_n)$ – вес вершины z_n (узловой точки) для потока данного направления;

$\mu_i(l_j)$ – вес дуги l_j для потока данного направления;

D – множество дуг маршрута;

V – множество вершин маршрута.

Тогда оптимальная схема распределения потоков является решением следующей задачи:

$$\mu\_opt = \min_i \left\{ \mu_i \left(WAY(z_0, z_p) \right) \right\}.$$

Заключение

Рассмотренные выше оптимизационные задачи базируются на гипотезе о распределении интервалов по времени между следующими подряд требованиями по закону Эрланга. Для транспортных потоков адекватность данной гипотезы проверена автором экспериментально. В работах [1–2] подробно рассматривается построение математической модели, построенной на гипотезе об эрланговском распределении интервалов по времени и ее аналитической реализации. Одной из положительных сторон модели является минимальное количество исходных данных, требующихся для расчетов показателей качества функционирования сети. Предложенное в данной работе граф-представление транспортной сети позволяет решать задачи по оптимизации распределения сетевых потоков. При наличии базы данных для конкретного участка улично-дорожной сети, построенной в соответствии со структурой матриц $A_{STREETS}$ и $B_{INTERSECTION}$, нетрудно осуществить компьютерную реализацию алгоритмов решения этих задач, например, в среде DELPHI.

Список литературы

1. Наумова Н.А. Моделирование и программная реализация движения автотранспортных средств по улично-дорожной сети: монография / Н.А. Наумова, Л.М. Данович. – Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2011. – 80 с.

2. Домбровский А.Н. Транспортные потоки на улично-дорожной сети городов: моделирование и управление: монография / А.Н. Домбровский, Н.А. Наумова; – Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2012. – 124 с.

3. Cox D.R., Smith W.L., Queues, Methuen, London, 1961.

4. Drew D.R. Traffic Flow Theory and Control, McGraw-Hill Book Company. – New York, 1968.

5. Inose H., Hamada T., Road Traffic Control, University of Tokyo Press. – Tokyo, Japan, 1975.

References

1. Naumova N.A., Danovich L.M. Modelirovaniye i programmnaya realizatsiya dvizheniya avtotransportnyh sredstv po ulichno-dorozhnoy sety [Modelling and Simulation of Traffic in Transportation Networks]. Krasnodar, Izdatelskiy dom-Yug, 2011. 80 p.

2. Dombrovskiy A.N., Naumova N.A. Transportnye potoki na ulichno-dorozhnoy sety gorodov: modelirovanie i upravlenie [Traffic Flows in Urban Transportation Networks: Modelling and Control]. Krasnodar, Izdatelskiy dom-Yug, 2012. 124 p.

3. Cox D.R., Smith W.L., Queues, Methuen, London, 1961.

4. Drew D.R. Traffic Flow Theory and Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

5. Inose H., Hamada, T., Road Traffic Control, University of Tokyo Press, Tokyo, Japan, 1975.

Рецензенты:

Атрощенко В.А., д.т.н., профессор, декан факультета компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар;

Видовский Л.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники и автоматизированных систем управления ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет» Министерства образования и науки РФ, г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 07.11.2012.