УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА В ПРОЦЕССЕ НАГРЕВА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ «ТЭН-ПЕСОК-ВОЗДУХ»

Телков М.Г., Тимошенко П.О., Суханов И.А., Наимов А.Н., Синицын А.А.

Вологодский государственный технический университет, Вологда, e-mail: nee-energo@yandex.ru

Построена и исследована математическая модель процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух» в виде начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в полярной системе координат с краевыми условиями, учитывающими особенности тепловых процессов на границах неоднородной среды. Приведено решение начально-краевой задачи и предложен алгоритм расчета тепловых характеристик процесса нагрева и регулярного температурного режима. Исследование актуально для разработки компьютерной виртуальной модели процесса нагрева неоднородной среды с целью наглядной демонстрации процесса нагрева за небольшой промежуток времени, а также для расчета соответствующих тепловых характеристик на основе реальных экспериментальных данных. Исследования проведены сотрудниками Вологодского государственного технического университета при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Ключевые слова: начально-краевая задача, собственные значения и собственные функции, стационарный режим, регулярный режим, расчет тепловых характеристик

RESEARCH OF THE TEMPERATURE RATE IN THE HEATING PROCESS OF THE INHOMOGENEOUS MEDIUM «TURBULAR ELECTRIC HEATING ELEMENT – SAND – AIR»

Telkov M.G., Timoshenko P.O., Sukhanov I.A., Naimov A.N., Sinitsyn A.A.

Vologda State Technical University, Vologda, e-mail: nee-energo@yandex.ru

There were built and researched a mathematical model of the heating process of the inhomogeneous medium «turbular electric heating element-sand-air» as an initial-boundary value problem for the heat conduction in the polar coordinate system with boundary conditions that consider features of heating processes at the boundaries of the inhomogeneous medium. There were given a solution of the initial-boundary value problem and suggested the algorithm of calculation of the thermal characteristics of the heating process and regular temperature rate. The work is relevant for the development of computer virtual model of the process of heating of a heterogeneous environment, as well as for the calculation of the thermal characteristics on the basis of real experimental data. The research is made by the personnel of Vologda State Polytechnic University within the confines of the federal program Science and Science and Pedagogical Personnel of Innovative Russia for 2009–2013.

Keywords: heat conduction, heat process, inhomogeneous medium, boundary value problem

Статья посвящена исследованию температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды, состоящей из термоэлектрического нагревателя (ТЭН), помещенного в стальную цилиндрическую трубу, песка, которым заполнено пространство между внутренней стальной трубой и внешней медной трубой, и воздуха, которым окружена внешняя труба. Данное исследование актуально для исследований, описанных в статьях [3, 2] по разработке компьютерной виртуальной модели процесса нагрева неоднородной среды с целью наглядной демонстрации процесса нагрева за небольшой промежуток времени, а также для расчета соответствующих тепловых характеристик на основе реальных экспериментальных данных.

С целью расчета температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух» были проведены три эксперимента с различными электрическими мощностями ТЭН и были произведены замеры температуры с помощью термопары в четырех точках (на поверхности внешней и внутренней труб и в двух внутренних точках) в последовательные моменты времени (через каждые 5 миллисекунд) от начала процесса до момента стабилизации температуры. Показания термопары фиксировались аналого-цифровым преобразователем и обрабатывались компьютерной программой Table Curve 2D. Программа для каждой точки замера выводила свой вариант формулы зависимости температуры от времени (рисунок) с конкретными значениями коэффициентов.

При этом возникают следующие вопросы:

1. Как связаны между собой коэффициенты получаемых формул и тепловые характеристики процесса – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости, теплопередачи?

2. Можно ли находить коэффициенты теплопередачи от ТЭНа к песку и теплоотдачи песка воздуху?

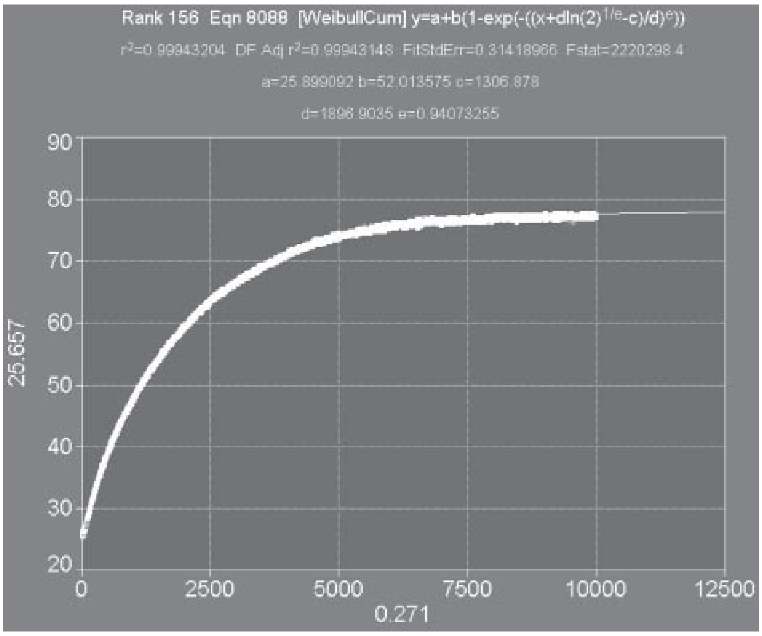
3. Какова динамика температуры в пространстве и во времени?

Для ответа на эти вопросы используется методология работы [1], состоящая из следующих этапов:

I. Построение математической модели процесса нагрева в виде начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с краевыми условиями, учитывающими неоднородность среды.

II. Решение краевой задачи методом разделения переменных, где необходимо построить базис собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям.

III. Расчет тепловых характеристик процесса на основе экспериментальных данных посредством формул стационарного и регулярного режимов.



Зависимость температуры от времени и вариант формулы этой зависимости в программе Table Curve 2D

Исследуемый процесс нагрева «ТЭН-песок-воздух» качественно отличается от процесса, рассмотренного в работе [1]. Вследствие этого получается другая начально-краевая задача, где базис собственных функций явно находить невозможно. Существование и полнота собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля доказаны в работе [4]. С их помощью выводится формула решения начально-краевой задачи, и, в частности, формула регулярного режима. Регулярным режимом определяется «кривая разгона» – кривая изменения температуры от начала процесса нагрева до момента стабилизации.

Построение математической модели

Для построения математической модели процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух» приведем следующие предположения и обозначения.

1. Температура есть функция $U(t, x)$ переменных t и x, где t – время, $t \geq 0$, x – расстояние от центра внутренней трубы до точки, где измеряется температура, $r \leq x \leq R$, $r > 0$, r – радиус внутренней трубы, R – радиус внешней трубы; в проведенных экспериментах $r = 10$ мм, $R = 50$ мм. Следовательно, температура зависит лишь от расстояния до центра внутренней трубы и она постоянна вдоль любой цилиндрической поверхности, концентрично расположенной относительно внутренней трубы.

2. Обозначим через $U(t, r)$ температуру на поверхности внутренней трубы в момент времени t, $U(t, r + 0)$ – температуру песка на границе с внутренней трубой, $U(t, x)$ – температуру песка во внутренней точке x, $r < x < R$, $U(t, R - 0)$ – температуру песка на границе с внешней трубой, $U(t, R)$ – температуру воздуха вблизи внешней трубы. При этом температурой медной трубы пренебрегаем из-за большого значения коэффициента теплопроводности меди.

3. Неоднородная среда характеризуется следующими константами: c_r – удельная теплоемкость внутренней (стальной) трубы, c_R – удельная теплоемкость внешней (медной) трубы, Q – количество тепла, выделяющееся из единичной площади внутренней трубы за единичный промежуток времени, h_r – коэффициент теплопередачи от внутренней трубы к песку, h – коэффициент теплоотдачи песка воздуху, α_R – коэффициент теплопотери воздуха вблизи внешней трубы, k, ρ, c – коэффициент теплопрово-

дности, плотность и удельная теплоемкость песка, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности песка.

Математическая модель процесса нагрева будет состоять из уравнений баланса во внутреннем пространстве песка, на внутренней поверхности трубы, на границах «ТЭН-песок», «песок-воздух», в воздухе вблизи внешней трубы.

Уравнение теплового баланса во внутреннем пространстве песка, согласно закону Фурье, [1], имеет вид:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}(t,x)=\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x)+\frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right],\quad t>0,\, r<x<R, \tag{1}$$

где правая часть есть оператор Лапласа в полярной системе координат с радиус-вектором x.

На поверхности внутренней трубы тепловой баланс зададим условием

$$c_r\frac{\partial U}{\partial t}(t,r)-k\frac{\partial U}{\partial x}(t,r+0)=Q,\ t>0, \tag{2}$$

где $c_r\frac{\partial U}{\partial t}(t,r)$ – количество тепла на нагревание внутренней трубы; $-k\frac{\partial U}{\partial x}(t,r+0)$ – количество тепла, отдаваемое песку.

На границе «ТЭН-песок» условие теплового баланса имеет вид:

$$-k\frac{\partial U}{\partial x}(t,r+0)=h_r\left[U(t,r)-U(t,r+0)\right],\quad t>0. \tag{3}$$

А на границе «песок-воздух» имеем:

$$-k\frac{\partial U}{\partial x}(t,R-0)=h_R\left[U(t,R-0)-U(t,R)\right],\quad t>0. \tag{4}$$

Тепловой баланс в воздухе вблизи внешней трубы зададим условием

$$-k\frac{\partial U}{\partial x}(t,R-0)=c_R\frac{\partial U}{\partial t}(t,R)+\alpha_R U(t,R), \tag{5}$$

где $c_R\frac{\partial U}{\partial t}(t,R)$ – количество тепла на нагревание внешней трубы; $\alpha_R U(t, R)$ – количество тепла, теряемое воздухом вблизи внешней трубы.

В начальный момент неоднородная среда имеет температуру окружающей среды:

$$U(0,x)=u_0,\quad r\le x\le R. \tag{6}$$

Таким образом, математическая модель процесса нагрева представляет собой начально-краевую задачу для дифференциального уравнения теплопроводности (1) в полярной системе координат с краевыми условиями (2), (3) – на внутренней границе, (4), (5) – на внешней границе, и начальным условием (6). Решением $U(t, x)$, $t \ge 0$, $r \le x \le R$ начально-краевой задачи (1)–(6) определяется температурный режим в процессе нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух». Функция $U(t, x)$ при каждом $t > 0$ терпит разрыв в точках $x = r$ и $x = R$.

Стационарный режим

Стационарным режимом, как в работе [1], называем стабилизацию температуры в процессе нагрева:

$$\bar U(x)=\lim_{t\to+\infty}U(t,x),\quad r\le x\le R,$$

где $\bar U(x)$ – температура на расстоянии x от центра ТЭНа при стабилизации. В формулах (1)–(5), переходя к пределу при $t \to +\infty$, выводим, что функция $\bar U(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{d^2\bar U(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\bar U(x)}{dx}=0,\quad r<x<R,$$

$$-k\frac{d\bar U}{dx}(r+0)=Q;$$

$$-k\frac{\partial\bar U}{\partial x}(r+0)=h_r\left[\bar U(r)-\bar U(r+0)\right];$$

$$-k\frac{\partial\bar U}{\partial x}(R-0)=\alpha_R\bar U(R);$$

$$-k\frac{\partial\bar U}{\partial x}(R-0)=h_R\left[\bar U(R-0)-\bar U(R)\right].$$

Отсюда находим $\bar U(x)$:

$$\bar{U}(x)=\begin{cases}\bar{U}(r+0)+\dfrac{Q}{h_r}, & x=r,\\ \left(1+\dfrac{\alpha_R}{h_R}\right)\dfrac{rQ}{R\alpha_R}+\dfrac{rQ}{k}\ln\dfrac{R}{x}, & r<x<R,\\ \dfrac{rQ}{R\alpha_R}, & x=R.\end{cases} \qquad (7)$$

По формуле (7) на основе экспериментальных данных можно находить значения тепловых констант α_R, k, h_r, h_R. А именно, пусть известны значения температуры в четырех точках замера при стабилизации:

$$\tilde{U}(r),\ \tilde{U}(r_2),\ \tilde{U}(r_3),,\ \tilde{U}(R)$$

где $r < r_2 < r_3 < R$. Полагая

$$\bar{U}(r)=\tilde{U}(r),,\bar{U}(r_2)=\tilde{U}(r_2),$$

$$\bar{U}(r_3)=\tilde{U}(r_3),\ \bar{U}(R)=\tilde{U}(R),$$

относительно неизвестных α_R, k, h_r, h_R, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{\alpha_R}{h_R}\right)\dfrac{rQ}{R\alpha_R}+\dfrac{rQ}{k}\ln\dfrac{R}{r}+\dfrac{Q}{h_r}=\tilde{U}(r),\\ \left(1+\dfrac{\alpha_R}{h_R}\right)\dfrac{rQ}{R\alpha_R}+\dfrac{rQ}{k}\ln\dfrac{R}{r_2}=\tilde{U}(r_2),\\ \left(1+\dfrac{\alpha_R}{h_R}\right)\dfrac{rQ}{R\alpha_R}+\dfrac{rQ}{k}\ln\dfrac{R}{r_3}=\tilde{U}(r_3),\\ \dfrac{rQ}{R\alpha_R}=\tilde{U}(R).\end{cases}$$

Находим неизвестные:

$$\begin{cases}\alpha_R=\dfrac{rQ}{R\tilde{U}(R)},\quad k=\dfrac{rQ\ln\dfrac{r_3}{r_2}}{\tilde{U}(r_2)-\tilde{U}(r_3)},\\ h_R=\left(\dfrac{R}{rQ}\cdot\dfrac{\tilde{U}(r_2)\ln\dfrac{R}{r_3}-\tilde{U}(r_3)\ln\dfrac{R}{r_2}}{\ln\dfrac{r_2}{r_3}}-\dfrac{1}{\alpha_R}\right)^{-1},\\ h_r=\left(\dfrac{\tilde{U}(r)}{Q}-\dfrac{r}{R}\left(\dfrac{11}{\alpha_R}+\dfrac{}{h_R}\right)-\dfrac{r}{k}\ln\dfrac{R}{r}\right)^{-1}.\end{cases} \qquad (8)$$

Решение начально-краевой задачи

Решение задачи (1)–(6) находим в следующем виде:

$$U(t,x)=\bar{U}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}A_iV_i(x)e^{-\lambda_i a^2 t}, \qquad (9)$$

где числа $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ и функции определяются как собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля в форме Кнезера [1]:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2V}{dx^2}(x)+\dfrac{1}{x}\dfrac{dV}{dx}(x)+\lambda V(x), & r<x<R,\\ \lambda c_r a^2 V(r)+k\dfrac{dV}{dx}(r+0)=0, & -k\dfrac{dV}{dx}(r+0)=h_r\left(V(r)-V(r+0)\right),\\ \left(-\lambda c_r a^2+\alpha_R\right)V(R)=-k\dfrac{dV}{dx}(R-0), & -k\dfrac{dV}{dx}(R-0)=h_R\left(V(R-0)-V(R)\right).\end{cases} \qquad (10)$$

В работе [4] доказаны существование и полнота собственных функций задачи (10) в пространстве функций

$$H=\left\{f(x):\ \int_r^R f^2(x)dx<+\infty,\quad |f(r)|+|f(R)|<\infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle=\int_r^R xf(x)g(x)dx+\frac{ra^2c_r}{k}f(r)g(r)+\frac{Ra^2c_R}{k}f(R)g(R).$$

Другими словами, любая функция $f(x) \in H$ единственным образом представима в виде ряда по собственным функциям задачи (10):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i V_i(x),$$

где $B_i = \langle f, V_i \rangle$, $\langle V_i, V_i \rangle = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\langle V_i, V_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. При этом для первого собственного значения λ_1 имеет место неравенство:

$$\frac{\alpha}{c_R} \le \lambda_1 \le \frac{4\alpha}{c_R}.$$

Полагая $f(x) = u_0 - \bar{U}(x)$, находим коэффициенты A_i, $i = 1, 2, \ldots$ представления (9):

$$A_i = \langle u_0 - \bar{U}, V_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (11)$$

В этом случае ряд в правой части формулы (9) при каждом $t > 0$ сходится в обычном смысле.

Регулярный режим

Согласно терминологии работы [5], регулярный температурный режим определяется приближенной формулой

$$U(t, x) \approx \bar{U}(x) + A_1 V_1(x) e^{-\lambda_1 a^2 t},$$

где λ_1 – первое собственное значение, а $V_1(x)$ – соответствующая нормированная собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (10); их можно находить приближенно численно-аналитическими методами. Коэффициент A_1 определяется формулой

$$A_1 = \langle u_0 - \bar{U}, V_1 \rangle.$$

Таким образом, можно задать следующий алгоритм расчета регулярного температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух»:

1. По экспериментальным данным $\tilde{U}(r)$, $\tilde{U}(r_2)$,, $\tilde{U}(r_3)$,, $\tilde{U}(R)$, полученным в ходе замеров температуры в четырех точках при стабилизации, находим приближенные значения тепловых констант с помощью формул (8).

2. Численно-аналитическими методами находим приближенные значения первого собственного значения λ_1 задачи Штурма-Лиувилля (10) и соответствующей нормированной собственной функции $V_1(x)$.

3. Находим стационарный режим $\bar{U}(x)$ формулой (7).

4. Вычисляем коэффициент A_1 формулой

$$A_1 = \int_r^R x\left(u_0 - \bar{U}(x)\right)V_1(x)dx + \frac{ra^2c_r}{k}\left(u_0 - \bar{U}(r)\right)V_1(r) + \frac{Ra^2c_R}{k}\left(u_0 - \bar{U}(R)\right)V_1(R) .$$

5. Регулярный режим рассчитывается формулой

$$U(t, x) \approx \bar{U}(x) + A_1 V_1(x) e^{-\lambda_1 a^2 t}, \quad r \le x \le R,\ t \ge 0. \qquad (12)$$

Список литературы

1. Самарский А.А. Избранные труды. – М.: МАКС Пресс, 2003. – С. 531.

2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

3. Синицын А.А., Тимошенко П.О. К разработке виртуального лабораторного стенда «Изучение процессов теплопередачи в условиях свободной конвекции» // Вузовская наука – региону: материалы седьмой всерос. науч.-техн. конф., 27 февр. 2009 г. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – Т. 1. – С. 162–163.

4. Телков М.Г., Наимов А.Н. Существование и полнота собственных векторов задачи Штурма-Лиувилля в форме Кнезера // Вузовская наука – региону: материалы десятой всероссийской научно-технической конференции. – Вологда: ВоГТУ, 2012. – С. 120–125.

5. Тимошенко П.О., Синицын А.А. Основные результаты разработки виртуального лабораторного стенда кафедры теплогазоснабжения и вентиляции // Молодые исследователи – регионам: материалы Всеросс. науч. конф. студентов и аспирантов. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – Т. 1. – С. 151–153.

References

1. Samarskii A.A. Selected works. (MAKS Press, Moscow, 2003). pp. 531.

2. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modeling. M.: Fizmatlit, 2002. 320 p.

3. Sinitsyn A.A., Timoshenko P.O. To the question of developing of a virtual laboratory stand «Study of the heat transfer under conditions of free convection» // University science to the Region: Proceedings of the Seventh All-Russian scientific and engineering conference, 27th Feb. 2009. Vologda: VSTU, 2009. Vol. 1. pp. 162–163.

4. Telkov M.G., Naimov A. N. The existence and completeness of the eigenvectors of the Sturm-Liouville theory in the form of Kneser // Proceedings of the tenth All-Russian Conference «University science to the Region». Vologda: VSTU, 2012. pp. 120–125.

5. Timoshenko P.O., Sinitsyn A.A. The main results of the development of virtual laboratory stand of the Chair of heat and gas supply and ventilation // Young researchers to the Region: Proceedings of All-Russian scientific conference of students and postgraduates. – Vologda: VSTU, 2009. Vol. 1. pp. 151–153.

Рецензенты:

Горбунов В.А., д.ф.-м.н., профессор, главный специалист ООО НПФ «ЭнергоКИТ», г. Вологда;

Калягин Ю.А., д.т.н., профессор, главный конструктор Общества с ограниченной ответственностью Научно-производственный центр «Информационные и энергетические технологии» (ООО НПЦ «Инэнтех»), г. Вологда.

Работа поступила в редакцию 16.10.2012.