

УДК 630.378, 539.3

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТА КОМПОЗИТНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ДЛЯ ГИДРОМЕХАНИЗАЦИИ РАБОТ ПО УЛУЧШЕНИЮ ЛЕСОСПЛАВНЫХ ПУТЕЙ

Лоскутов Ю.В., Гизатуллин Р.Г.

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»,
Йошкар-Ола, e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Представлен стержневой конечный элемент для расчета тонкостенных трубопроводов (пульпопроводов) из полимерных композитных материалов. Предполагается, что стенка трубопровода изготовлена путем перекрестной спиральной намотки на оправку двух симметричных систем волокон. Получены расчетные соотношения для коэффициентов матрицы жесткости и вектора узловых сил конечного элемента тонкостенного трубопровода. Используются традиционные подходы строительной механики. Учитывается слоистая структура материала и анизотропия термоупругих свойств. Предполагается, что «монослой» работает в условиях плоского напряженного состояния. Рассмотрено двухкомпонентное статическое нагружение, включающее действие температуры и внутреннего давления. При этом распределенные температурные и гидродинамические воздействия заменены эквивалентной системой сосредоточенных узловых сил. В частном случае изотропного тела формулы приобретают известный вид.

Ключевые слова: трубопроводы, стержневой конечный элемент, деформации, напряжения, полимерные композиционные материалы, метод конечных элементов

THE STRAIGHT ONE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT FOR CALCULATING OF COMPOSITE PIPELINES FOR WORKS BY HYDROMECHANIZATION FOR BETTERMENT OF FLOATING ROUTES

Loskutov Y.V., Gizatullin R.G.

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, e-mail: loskutovyv@volgatech.net

In the article is presented the straight one-dimensional finite element for calculating of thin-walled pipes (or slurry pipelines) from polymer composite materials. It's assumed that the wall of the pipeline is made by cross-spiral winding onto the mandrel two symmetrical systems of fibers. It's obtained the calculated relations for the coefficients of the stiffness matrix and the vector of nodal forces of a finite element of a thin-walled pipe. The traditional methods of structural mechanics are used. It's assumed that the «monolayer» works in the condition of a plane stress. The static loading includes the effect of temperature and internal pressure. The distribution of thermal and hydrodynamic effects are replaced by an equivalent system of concentrated nodal forces. It takes into account the layered structure of the material and the anisotropy of the thermoelastic properties. In the particular case of an isotropic body formulas are known form.

Keywords: piping, straight one-dimensional finite element, , floating route, strength, stiffness, polymer composite materials, FEM

Пульпопровод – сооружение для размещения и поддержания на плаву трубопровода, по которому производится гидротранспорт пульпы от грунтового насоса на берег (рис. 1). При создании пульпопроводов (трубопроводов) для земснарядов применяют различные материалы. Металлические трубопроводы (пульпопроводы) используются с начала становления гидромеханизации и по настоящее время [10]. Однако, в связи с большим весом, низкой износостойкостью и сложностью при монтаже, им на замену все чаще приходят современные пульпопроводы из полимерных композитных материалов (ПКМ) [8]. Слоисто-волокнистая структура материала, армирование высокопрочными и высокомодульными волокнами и тонкие стенки обеспечивают достаточно эффективное сочетание прочности, жесткости и трещиностойкости с относительно малым удельным весом. При этом следует учитывать, что

распространенными элементами современных силовых конструкций (ферм, рам, балок, валов, арок, труб, трубопроводов и т.д.) являются тонкостенные пространственные стержни.

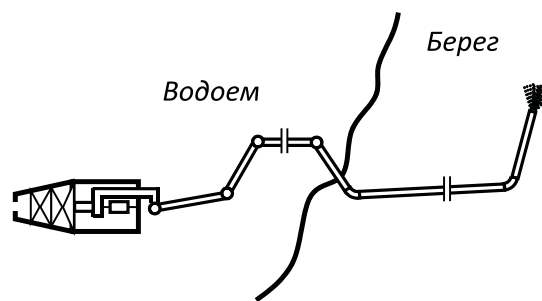


Рис. 1

Разработке теории и методов расчета тонкостенных слоистых стержней посвящен ряд работ, например [4, 5, 9]. В [4] разрешающие уравнения строятся на базе об-

щей теории многослойных анизотропных оболочек. В работе [9] для вывода расчетных соотношений применяются вариационно-матричные методы.

1. Стержневой конечный элемент.

Рассмотрим конечно-элементную модель: расчетные соотношения (матрицу жесткости и вектор узловых сил) составим, используя традиционные подходы строительной механики стержневых систем.

На рис. 2 изображен прямолинейный конечный элемент (КЭ) как участок цилиндри-

ческой оболочки. Стенка оболочки образована путем перекрестной спиральной намотки на оправку двух симметричных систем волокон (нитей или прядей). Волокна составляют с образующей цилиндра углы $\pm \theta$.

Число слоев принимаем $2k + 1$. Внутренний слой (оправку) считаем однородным и изотропным, слой из ПКМ (монослой) – ортотропными и линейно упругими. Связи волокон и связующего, а также отдельных слоев друг с другом предполагаем идеальными.

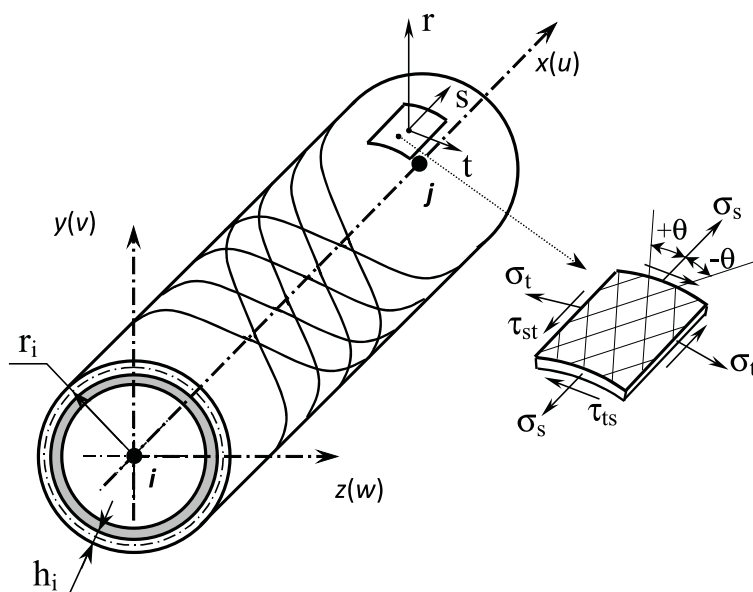


Рис. 2. Прямолинейная труба как многослойная цилиндрическая оболочка

Используем правые ортогональные системы осей координат. Координаты 1, 2, 3 (естественные координаты) связываем с осями упругой симметрии монослоя; координаты s, r, t – с его срединной поверхностью; координаты x, y, z – с осевой линией и поперечным сечением КЭ (см. рис. 2).

2. Соотношения упругости. Принимаем, что монослой «работает» в условиях плоского напряженного состояния. В этом случае зависимость между деформациями и напряжениями для однонаправленного слоя имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (1)$$

или в матричной форме:

$$\{\varepsilon_{12}\} = [S^0]\{\sigma_{12}\} + \{\alpha_{12}\}\Delta T. \quad (1')$$

Здесь $\{\varepsilon_{12}\}$, $\{\sigma_{12}\}$, $\{\alpha_{12}\}$ – соответственно векторы деформаций, напряжений и коэффициентов температурного расширения;

$[S^0]$ – матрица податливости; ΔT – изменение температуры; $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}, \alpha_1, \alpha_2$ – технические постоянные термоупругости (эффективные термоупругие постоянные). При этом $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$.

Эффективные упругие константы определяются формулами [3]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \psi E' + (1 - \psi) E''; \\ E_2 &= E' E'' / [\psi E'' + (1 - \psi) E']; \\ G_{12} &= G' G'' / [\psi G'' + (1 - \psi) G']; \\ \nu_{12} &= \psi \nu' + (1 - \psi) \nu''; \\ \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (4)$$

или $\{\sigma_{12}\} = [G^0]\{\varepsilon_{12}\} - \{\beta_{12}\}\Delta T$,

где $[G^0]$ – матрица жесткости монослоя; $\{\beta_{12}\}$ – вектор температурных напряжений. Коэффициенты матрицы $[G^0]$ и вектора $\{\beta_{12}\}$ связаны с техническими постоянными термоупругости следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} g_{11}^0 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & g_{12}^0 &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ g_{22}^0 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & g_{66}^0 &= G_{12}; & g_{21}^0 &= g_{12}^0; \\ \beta_1 &= (\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2)E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ \beta_2 &= (\alpha_2 + \nu_{12}\alpha_1)E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}). \end{aligned}$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}; \quad [L_2] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При этом $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$. Индекс «т» обозначает операцию транспонирования матрицы.

Заметим, согласно (6), в произвольной системе координат s, r, t угловые деформации γ_{st} однонаправленного слоя получают связанными с нормальными напряжениями σ_s и σ_r , а линейные деформации ε_s и ε_r – с касательными напряжениями τ_{st} . В частном случае перекрестной спиральной симметричной намотки для системы, составленной из двух монослоев с углами $\pm \theta$, коэффициенты $s_{16} = s_{26} = 0$, $g_{16} = g_{26} = 0$, $\alpha_{st} = 0$, $\beta_{st} = 0$. В результате указанные связи исчезают.

При напряженном состоянии с компонентами: $\sigma_s, \tau_{st}, \sigma_t = 0$ технические постоянные термоупругости ортотропного композита будут равны [1]:

Формулы для эффективных коэффициентов температурного расширения имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \psi \alpha' + (1 - \psi) \alpha''; \\ \alpha_2 &= [\psi \alpha' E' + (1 - \psi) \alpha'' E''] / [\psi E' + (1 - \psi) E'']. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $(*)'$ и $(*)''$ – характеристики волокна и матрицы соответственно; ψ – коэффициент армирования.

Соотношения, обратные (1), имеют вид:

Перепишем зависимости (1) и (4) из естественной системы координат 1, 2, 3 к цилиндрическим координатам s, r, t . Получим

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{st}\} &= [S]\{\sigma_{st}\} + \{\alpha_{st}\}\Delta T, \\ \{\sigma_{st}\} &= [G]\{\varepsilon_{st}\} - \{\beta_{st}\}\Delta T. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразование поворота осей координат относительно нормали к поверхности имеют известный вид:

$$[S] = [L_1][S^0][L_1]^T; \quad [G] = [L_2][G^0][L_2]^T; \quad (6)$$

$$\{\alpha_{st}\} = [L_1]\{\alpha_{12}\}; \quad \{\beta_{st}\} = [L_2]\{\beta_{12}\}.$$

Здесь $[L_1]$ и $[L_2]$ – матрицы преобразования поворота:

$$\begin{aligned} E_s &= g_{11} - \frac{g_{12}^2}{g_{22}}; & E_t &= g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}}; \\ G_{st} &= g_{66}; & \nu_{st} &= \frac{g_{12}}{g_{22}}; \\ \alpha_s &= \frac{\beta_s g_{22} - \beta_t g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}; & \alpha_t &= \frac{\beta_t g_{11} - \beta_s g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Матрица жесткости. Матрицу жесткости КЭ представим в виде:

$$[C^{(n)}] = \begin{bmatrix} C_{II}^{(n)} & C_{IJ}^{(n)} \\ C_{JI}^{(n)} & C_{JJ}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где n – порядковый номер КЭ; i и j – номера узлов; $[C_{ii}^{(n)}], [C_{ij}^{(n)}], [C_{ji}^{(n)}], [C_{jj}^{(n)}]$ – подматрицы жесткости КЭ размера (6×6) .

Подматрицу жесткости $[C_{ii}^{(n)}]$ определяем через подматрицу податливости КЭ – $[C_{ii}^{(n)}] = [\delta_{ii}^{(n)}]^{-1}$. Компоненты симметричной матрицы $[\delta_{ii}^{(n)}]$ находим при помощи интегралов Мора. Тогда, для консольного КЭ (считаем узел j зашпелен) получим [2]:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{l}{A_x}; \\ \delta_{22} &= \frac{l^3}{3B_z} + k_y \frac{l}{A_y}; \\ \delta_{26} &= -\frac{l}{2B_z}; \\ \delta_{33} &= \frac{l^3}{3B_y} + k_z \frac{l}{A_z}; \\ \delta_{35} &= \frac{l}{2B_y}; \quad \delta_{44} = \frac{l}{B_x}; \\ \delta_{55} &= \frac{l}{B_y}; \quad \delta_{66} = \frac{l}{B_z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Оставшиеся коэффициенты матрицы $[\delta_{ii}^{(n)}]$ равняются нулю. В этом случае деформированное состояние КЭ определяется шестью независимыми обобщенными координатами, образующими вектор обобщенных перемещений узла (i),

$$\{q_i\} = \{u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}\}^T.$$

В формулах (10) $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ – это жесткости поперечного сечения стержня на растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб соответственно. Причем,

$$\begin{aligned} A_x &= \int_A E_s dA = 2\pi \sum_{i=1}^{k+1} (E_{si} h_i r_i); \\ A_y = A_z &= \int_A G_{sti} dA = 2\pi \sum_{i=1}^{k+1} (G_{sti} h_i r_i); \tag{11} \\ B_x &= \int_A G_{sti} r^2 dA = 2\pi \sum_{i=1}^{k+1} (G_{sti} h_i r_i^3); \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\tau_o} = \frac{\tau_o l}{2A_x}, \quad \varepsilon_{\tau} = \Delta T \left[\frac{\sum_{i=1}^{k+1} (\beta_{Si} h_i) \sum_{i=1}^{k+1} (g_{22i} h_i) - \sum_{i=1}^{k+1} (\beta_{Ti} h_i) \sum_{i=1}^{k+1} (g_{12i} h_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} (g_{11i} h_i) \sum_{i=1}^{k+1} (g_{22i} h_i) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} (g_{12i} h_i) \right)^2} \right],$$

$$B_y = B_z = \int_A E_s y^2 dA = \pi \sum_{i=1}^{k+1} (E_{si} h_i r_i^3),$$

где безразмерные коэффициенты

$$k_y = k_z = \frac{A_y}{B_z^2} \int_A S_z^{*2} dA = \frac{\pi A_y}{B_z^2} \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{E_{si} h_i r_i^5}{G_{sti}} \right) \tag{12}$$

учитывают неравномерное распределение по поперечному сечению касательных напряжений изгиба (определяются согласно [2] в результате осреднения энергий деформации сдвига). Здесь $S_z^* = \int_{A^*} E_s y dA$ – упру-

го-статический момент части поперечного сечения A^* ; i – порядковый номер слоя; r_i, h_i – средний радиус и толщина слоя; l – длина КЭ.

Подматрицы жесткости КЭ $[C_{ji}^{(n)}]$ и $[C_{ij}^{(n)}]$ находятся при помощи преобразований вида:

$$[C_{ji}^{(n)}] = -[Z^{(n)}][C_{ii}^{(n)}]$$

и

$$[C_{ij}^{(n)}] = -[Z^{(n)}][C_{ij}^{(n)}], \tag{13}$$

где $[Z^{(n)}]$ – матрица линейных преобразований [6].

4. Вектор узловых сил. Распределенные температурные и гидродинамические воздействия заменяем эквивалентной системой сосредоточенных узловых сил. Для этого используем основную систему метода перемещений: узловые силы в системе координат x, y, z (рис. 2) находим как реакции узловых связей, взятые с обратным знаком,

$$\begin{Bmatrix} F_i^{(n)} \\ F_j^{(n)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} C_{ii}^{(n)} \\ C_{ji}^{(n)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(n)} \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где $\{F_i^{(n)}\}$ и $\{F_j^{(n)}\}$ – шестикомпонентные векторы узловых сил; $\{\Delta_i^{(n)}\}$ – вектор упругих перемещений узла i :

$$\begin{aligned} \{\Delta_i^{(n)}\} &= (\varepsilon_m + \varepsilon_p + \varepsilon_{\tau_o}) \{x^{(n)}\}, \\ \{x^{(n)}\} &= l \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^m. \end{aligned} \tag{15}$$

Для трубы с тонкими стенками:

$$\varepsilon_p = \frac{R(p_m + \rho_{ж} v_m^2)}{2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{k+1} (g_{22i} h_i) - 2 \sum_{i=1}^{k+1} (g_{12i} h_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} (g_{11i} h_i) \sum_{i=1}^{k+1} (g_{22i} h_i) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} (g_{12i} h_i) \right)^2} \right]. \quad (16)$$

Здесь p_m и v_m – стационарные составляющие давления и скорости внутреннего потока; $\rho_{ж}$ – плотность; τ_0 – интенсивность сил трения жидкости о стенки трубы [7]; R – радиус отверстия трубы; g_{11} , g_{12} , g_{22} – элементы матрицы (6).

Вектор $\{R_j^{(n)}\}$ определяет реакции в узле j от сил трения интенсивностью τ_0 :

$$\{R_j^{(n)}\} = \tau_0 l \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

В частном случае изотропного тела формулы (16) получают известный вид:

$$\varepsilon_r = \alpha \Delta T;$$

$$\varepsilon_p = (p_m + \rho_{ж} v_m^2) \frac{1-2\mu}{2E} \frac{R}{h}; \quad (17)$$

$$\varepsilon_{\tau_0} = \frac{\tau_0 l}{2EA}.$$

Закключение

Таким образом, получены расчетные соотношения для коэффициентов матрицы жесткости и вектора узловых сил КЭ тонкостенного трубопровода, изготовленного из волокнистого композита. Рассмотрено двухкомпонентное статическое нагружение, включающее действие температуры и внутреннего давления. Учитывается слоистая структура материала и анизотропия термоупругих свойств.

Результаты получены при выполнении исследований в рамках государственного задания Минобрнауки России на выполнение НИОКР, а также гранта РФФИ № 10-08-97017-р_поволжье_a.

Список литературы

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
2. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
3. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
5. Кножел А., Робинсон Е. Расчет ферм, балок, рам и тонкостенных элементов // Композиционные материалы: В 8 томах. – Т.7. Анализ и проектирование конструкций / под ред. К. Чамиса. – 1978. – 300 с.
6. Куликов Ю.А., Лоскутов Ю.В. Размеростабильные конструкции цилиндрических сосудов давления и трубопро-

водов из многослойных композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. ИПРИМ РАН. – 2000. – Т. 6, № 2. – С. 181–191.

7. Куликов Ю.А. Жидкостные трубопроводы: Численное исследование напряженно-деформированного состояния, индуцированного стационарным внутренним потоком // Расчеты на прочность. – М., 1993. – Вып. 33. – С. 119–31.

8. Лоскутов Ю.В. Расчет конструкций композитных трубопроводов для гидромеханизации дноуглубительных работ по улучшению лесосплавных путей // Вестник Марийского государственного технического университета. Серия: Лес. Экология. Природопользование. – Йошкар-Ола, 2012. – № 1. – С. 35–43.

9. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ, 1993. – 294 с.

10. Ялтанец И.М. Справочник по гидромеханизации: Теория и практика открытых горных и строительных работ. – М.: Изд-во МГТУ, 2011. – 737 с.

References

1. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov*, Moscow: Izdatt. Mashinostroenie, 1984, pp. 263.
2. Birger I.A., Mavljutov R.R. *Soprotivlenie materialov*, Moscow: Akademizdatsentr «Nauka» RAN, 1986, pp. 560.
3. Bolotin V.V., Novichkov Ju.N. *Mehanika mnogoslojnyh konstrukcij*, Moscow: Izdatt. Mashinostroenie, 1980, pp. 376.
4. Vasil'ev V.V. *Mehanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov*, Moscow: Izdatt. Mashinostroenie, 1988, pp. 272.
5. Knojel A., Robinson E. *Raschet ferm, balok, ram i tonkostennyh jelementov // Kompozicionnye materialy*, Vol. 7 «Analiz i proektirovanie konstrukcij», Pod red. K.Chamisa, 1978, p. 300.
6. Kulikov Yu.A., Loskutov Yu.V. *Cylindrical pressure vessels and pipelines made from multilayer composites. The problem of stability of dimension*, *Journal on Composite Mechanics and Design*, 2000, Vol. 6, No. 2, pp. 181–191.
7. Kulikov Yu.A. *Zhidkostnye truboprovody: Chislennoe issledovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija, inducirovannogo stacionarnym vnutrennim potokom* (Sbornik «Raschety na prochnost»), Moscow: Bauman Moscow State Technical Univ., Vol. 33, pp. 119–131.
8. Loskutov Yu. V. *Journal «Vestnik Mari State Technical Universit»*, 2012, no. 1, pp. 35–43.
9. Popov B.G. *Raschet mnogoslojnyh konstrukcij variacionno-matrichnymi metodami*, Moscow: Bauman Moscow State Technical Univ., 1993, pp. 294.
10. Jaltanec I.M. *Spravochnik po gidromehanizacii: Teorija i praktika otkrytyh gornyh i stroitel'nyh rabot*, Moscow: Moscow State Mining Univ., 2011, pp. 737.

Рецензенты:

Савельев В.В., д.т.н., доцент, профессор кафедры строительного производства Чебоксарского политехнического института (филиал) ФГБОУ ВПО «Московский государственный открытый университет им. В.С. Черномырдина», г. Чебоксары;

Поздеев А.Г., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», г. Йошкар-Ола.

Работа поступила в редакцию 16.10.2012.