

УДК 532.529 + 629

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ МАХОВСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ К РАСЧЕТУ ДИСКА МАХА В СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕ

¹Усков В.Н., ²Булат П.В., ³Продан Н.В.

¹Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова;

²ООО «НОЦ «Динамика»;

³ООО «Проблемная лаборатория «Турбомашини», Санкт-Петербург, e-mail: kolinti@mail.ru

Приведено теоретическое и расчетно-экспериментальное обоснование модели образования диска Маха в сверхзвуковой нерасчетной струе. Созданная усилиями российских математиков в середине 80-х годов полная классификация возможных перестроек ударных волн, каустик и волновых фронтов, сформулированные на основе принципа максимума множества Максвелла теоремы существования конфигураций волновых фронтов для случаев различной размерности позволили однозначно указать критерий образования диска Маха как в случае отражения скачка от стенки, так и при его отражении от оси симметрии. Проведено расчетно-экспериментальное исследование, которое подтвердило сделанные теоретические выводы. Показано, что различие классификаций перестроек ударных волн для пространств с четной и нечетной размерностью приводит к тому, что ударно-волновые структуры, образующиеся в стационарных течениях, не могут существовать в нестационарных потоках. И наоборот.

Ключевые слова: диск Маха, ножка Маха, регулярное отражение скачка, нерегулярное отражение скачка, стационарная маховская конфигурация, тройная конфигурация ударных волн, тройная точка

RATIONALE FOR THE USE OF MODELS OF STATIONARY MACH CONFIGURATION CALCULATION OF MACH DISK IN A SUPERSONIC JET

¹Uskov V.N., ²Bulat P.V., ³Prodan N.V.

¹Baltiysky State Technical University «Voenmekh» n.a. D.F. Ustinov;

²«SEC» Dynamics ltd;

³«Problem Laboratory» turbomachine ltd, St. Petersburg, e-mail: kolinti@mail.ru

Shows the theoretical and computational models and experimental study of Mach disk formation in a nonisobaric supersonic jet. Thanks to the efforts of Russian mathematicians in the mid-80s complete classification of possible modifications of shock waves, caustics and wave fronts, formulated on the basis of the maximum set of Maxwell's theorem of configurations for the cases of the wave fronts of different dimensions allowed uniquely specify a criterion for the formation of Mach disk in the case of reflection of shock from the wall, and at its reflection from the axis of symmetry. A computational and experimental study, which confirmed the theoretical conclusions made. It is shown that the difference between the classifications of shock waves for the rearrangement of spaces with even and odd dimensions leads to the fact that the shock-wave structures formed in the stationary currents can not exist in unsteady flows. And vice-versa.

Keywords: disk Mach, Mach stem, the regular reflection of shock, irregular reflection of shock, a stationary Mach configuration, triple configuration of shock waves, the triple point

Сверхзвуковая струя (рис. 1) на начальном участке имеет развитую ударно-волновую структуру (УВС). Слои смешения на теоретической границе струи и танген-

циальном разрыве за тройной точкой разделены протяженными областями, в которых вязкие свойства газа практически не проявляются.

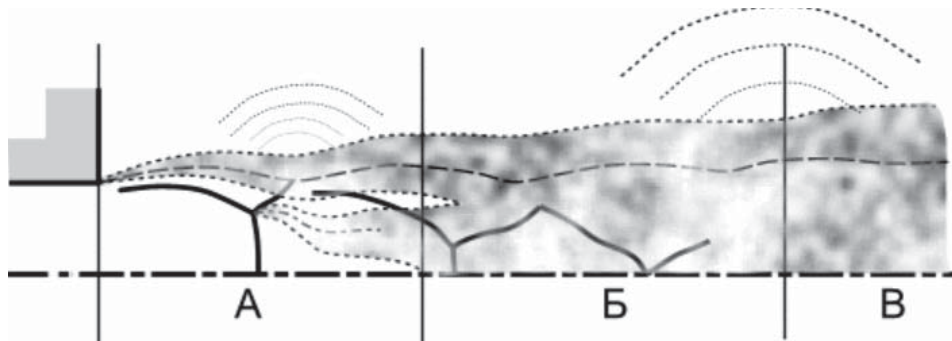


Рис. 1. Характерные участки сверхзвуковой турбулентной струи: а – начальный участок; б – переходный участок; в – основной участок

Границей начального участка считается сечение, в котором происходит смыкание слоев смешения. Ниже по течению зоны невязкого газа отсутствуют. В перерасширенных и умеренно недорасширенных струях начальный участок охватывает 3–4 первые бочки. В недорасширенных струях при нерасчетности (отношение давления на срезе сопла к давлению в окружающей среде) больше 10–15 переходный участок начинается практически сразу же за пределами первой бочки, т.к. диск Маха больших размеров перекрывает почти все поперечное сечение струи и слои смешения на границе и за тройной точкой находятся близко друг от друга.

При использовании современных вычислительных пакетов для расчета сверхзвуковых струй наибольшая сложность связана с необходимостью учитывать изменение масштаба турбулентности в слоях смешения на сильных скачках уплотнения, а также неадекватность гипотезы Буссинеска для областей течения с большими градиентами давления [8]. Именно поэтому важно правильно представлять механизм образования диска Маха, область течения за которым представляет собой трудный и в тоже время самый важный объект расчета в сверхзвуковой струе, истекающей из сопла летательного аппарата.

Понятие газодинамического разрыва

Рассмотрим классическое описание элементов УВС в струе идеального газа. Удобно записать систему уравнений идеального газа в координатах n (длина нормали к линиям тока) – s (длина дуги вдоль линии тока) с использованием основных газодинамических неравномерностей N_i

$$N_1 = \frac{\partial \ln P}{\partial s}; \quad N_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial s};$$

$$N_3 = \zeta = \frac{\partial \ln P_0}{\partial n}. \quad (1)$$

Здесь P – давление, ϑ – угол наклона вектора скорости, P_0 – полное давление, ζ – завихренность. После несложных преобразований получается система уравнений

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} N_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \frac{\sin \vartheta}{y} = 0;$$

$$\gamma M^2 \frac{\partial \ln V}{\partial s} = -N_1; \quad (2)$$

$$M^2 N_2 = -\frac{\partial \ln P}{\partial n}.$$

Здесь M – число Маха, γ – показатель адиабаты, для воздуха равный 1,4. Иногда систему уравнений (2) в переменных s – n называют уравнениями Эйлера в естественной системе координат. Однако это неверно, т.к. единичные векторы s и n образуют ортогональные геодезические линии фазового пространства, но системы координат в принятом понимании не образуют. Действительно, при перемещении вдоль координаты x_i , координата x_j не должна изменяться. Для естественной системы координат это справедливо только в частном случае, например, в течении от источника.

Как известно, сверхзвуковые течения газа могут содержать области, где параметры меняются резко, скачком. В рамках модели идеального газа в таких случаях говорят о существовании *газодинамических разрывов*. Разрывы бывают нулевого порядка Φ_0 (центр волны разрежения или сжатия, скачок уплотнения и поверхность скольжения), на которых терпят разрыв газодинамические параметры течения (P , v , ϑ) и разрывы первого порядка Φ_1 , на которых терпят разрыв первые производные газодинамических переменных. Иногда Φ_1 называют *слабым разрывом*. Очевидно, что можно определить особенности Φ_i пространства газодинамических переменных любого порядка.

Из законов сохранения потока вещества, потока энергии компонент потока импульса при переходе течения через разрыв выводятся основные соотношения *условий динамической совместности* (УДС) на скачках уплотнения и других разрывах Φ_0 , связывающие параметры течения до разрыва и за ним. В качестве параметра в этих соотношениях выступает *интенсивность разрыва* J . Чаще всего интенсивность определяется как отношение давления за разрывом к давлению перед ним. Получены также уравнения, связывающие неравномерности течения перед скачком и за ним. Эти соотношения называются *дифференциальными условиями динамической совместности* (ДУДС)

$$N_i = c_i \sum_{j=1}^5 A_{ij} N_j. \quad (3)$$

Коэффициенты A_{ij} , c_i опубликованы в [9, 10]. В целях общности в уравнения (3) добавлены $N_4 = \delta/y$ ($\delta = 0$ в плоском течении) и $N_5 = K_\sigma$ (кривизна скачка уплотнения). Уравнения УДС и ДУДС, выведенные из законов сохранения, позволяют построить полную классификацию состояний равновесия ударно-волновых структур (стационарных УВС), но *ничего не говорят об их устойчивости*.

Геометрический смысл уравнений динамики идеального газа

По современным представлениям газодинамические переменные образуют гиперпространство, а уравнения Эйлера описывают в нем гиперповерхность. На вопрос о *структурной устойчивости* может дать ответ изучение топологии этой гиперповерхности.

Рассмотрим ряд важных геометрических понятий. В основе каждого раздела физики лежит своя геометрия пространства параметров. Геометрия Минковского описывает пространство специальной теории относительности. Риманова геометрия лежит в основе общей теории относительности. Симплектическая геометрия – фазовое пространство классической механики и т.п.

Геометрии различаются между собой тем, каким образом введена метрика пространства. *Метрика* – выражение для длины элемента произвольной кривой. Длина вектора не должна зависеть от выбора системы координат.

Обобщением понятия поверхности в современной геометрии является термин *многообразие*. Многообразие представляет собой произвольное множество точек, представленное в виде объединения конечного числа областей евклидова пространства, в каждой из которых заданы локальные координаты. Пересечение областей само является областью евклидова пространства, в которой действуют уже две локальные системы координат. Требуется, чтобы каждая из этих локальных систем выражалась через другую систему дифференцируемым образом. Если на многообразии можно выделить замкнутую область A , ограниченную неравенством $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$), где $f(x)$ – гладкая функция, то A называется многообразием с краем. Требуется, чтобы градиент функции не обращался на краю в нуль.

Первая бочка сверхзвуковой струи идеального газа представляет собой типичное многообразие с краем и при изучении геометрии ее элементов можно пользоваться методами современной геометрии. Край – это теоретическая граница струи. Внутри многообразия выделены области (подмногообразия): сжатый слой, волна разрежения и т.п., пересечением которых являются элементы ударно-волновой структуры. В каждой из областей заданы локальные координаты, например, связанные с линиями тока и нормальными к ним.

Рассмотрим для простоты одномерное уравнение переноса Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение описывает поле скоростей u свободно движущихся по прямой частицы. Закон свободного движения частицы имеет вид $x = \varphi(t) = x_0 + vt$, где v – скорость частицы. Функция φ удовлетворяет уравнению Ньютона. По определению $d\varphi/dt = u(t, \varphi)$. Продифференцировав последнее соотношение по t , получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, описание движения при помощи уравнений Эйлера для поля и при помощи уравнения Ньютона для частиц эквивалентны. Известно, что квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных решаются с помощью построения характеристик. В математике слово «*характеристический*» всегда означает «*не зависящий от произвола выбора*». Каждому многообразию соответствует свое характеристическое поле. Характеристики – фазовые кривые характеристического поля. Уравнение характеристик уравнения Эйлера эквивалентно уравнению Ньютона. Таким образом, задачу о распространении волны можно решить путем построения характеристик, вдоль которых движутся материальные частицы. Общую геометрическую теорию уравнений в частных производных, способы построения характеристик можно найти в [1].

На рис. 2 показано, как решается уравнение переноса с помощью характеристик [1]. На плоскости y - x задана начальная функция $y = u_0(x)_{t=0}$. Уравнения характеристик $t' = 1$, $y' = 0$, $x' = y$. В моменты времени $t = 1$, $t = 2$ и т.д. решение строится путем переноса вдоль характеристик (по горизонтали) значений в начальный момент времени.

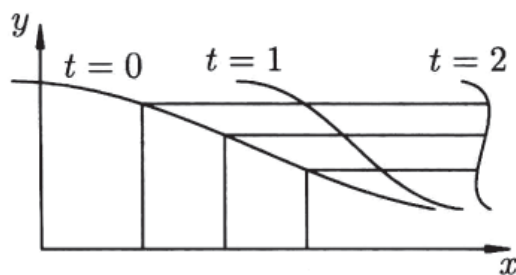


Рис. 2. Решение уравнения Эйлера с помощью характеристик [1]

Видно, что в момент времени $t = 2$ кривая перестает быть графиком функции $f = y(x)$ (рис. 2). Интегральная поверхность неоднозначно проектируется на плоскость x - t . Кривая критических значений проектирования (касательная к поверхности вертикальна) имеет точку возврата. Как уже говорилось выше, уравнение Эйлера описывает

эволюцию поля скорости невзаимодействующих частиц. Нарушение единственности решения можно трактовать как свободное прохождение потоков частиц друг сквозь друга. С другой стороны, при большой плотности частиц их взаимодействием нельзя пренебречь. В этом случае уравнение Эйлера не выполняется, и его заменяют другим уравнением, учитывающим взаимодействие, например, на уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

При малых ε в областях плавного изменения параметров оно приближает уравнение Эйлера и, в то же время, допускает решения типа «ударных волн». Справа и слева от ударной волны течение описывается уравнениями Эйлера, внутри ударной волны уравнением, подобным уравнению теплопроводности. Таким образом, ударная волна (скачок уплотнения, газодинамический разрыв) – это особенность отображения проектирования многообразия газодинамических параметров (рис. 3).

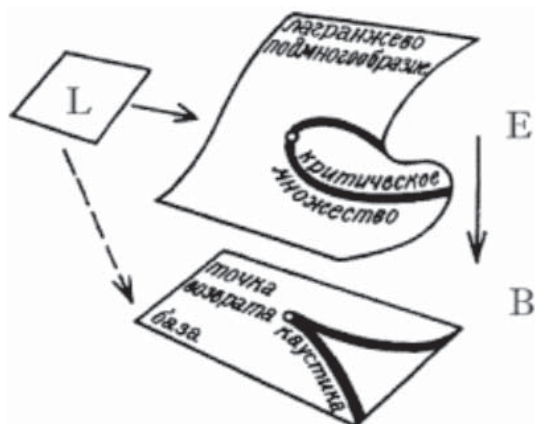


Рис. 3. Ударная волна – особенность многообразия параметров [4]

В настоящее время теория особенностей усилиями выдающихся математиков современности Уитни, Арнольда, Тома, Пуанкаре, Зимана разработана очень хорошо. Для практически важных случаев размерности пространства 2 и 3 составлена полная классификация особенностей отображений и последовательности их перестроек при изменении некоторого критериального параметра [2]. Пространства газовой динамики с четной и нечетной размерностью описываются разными типами геометрий: симплектической и контактной. Классификации устойчивых особенностей отображений этих геометрий, называемых лагранжовыми и лежандровыми, разные.

Таким образом, классификация ударно-волновых структур распадается на не-тождественные подмножества устойчивых структур в зависимости от размерности пространства. Эту классификацию можно использовать для анализа структурной устойчивости УВС. Сказанное выше поясняет, почему нерегулярное отражение ударной волны с особой интенсивностью J_R (выражение для $J_R = f(\gamma, M)$ см. в [10] или в первой части настоящей статьи) встречается только в нестационарном случае, когда размерность пространства нечетная, и не встречается в стационарном, когда пространство имеет четную размерность.

Обоснование модели J_0 с помощью закона Морса

Покажем, что при числах Маха $M < M_{0R}$ ($M_{0R} = 2,204$ для воздуха) переход к нерегулярному отражению при интенсивности скачка $J = J_R$ невозможен. Приведем минимально необходимые сведения из теории особенностей гладких отображений.

Определение. Критической точкой гладкой функции называется точка, в которой дифференциал функции равен 0.

Точка пересечения поляры, соответствующей падающему скачку уплотнения, с основной полярой является критической точкой.

Определение. Критическая точка называется невырожденной, если второй дифференциал – невырожденная квадратичная форма. Всякая вырожденная критическая точка при малом шевелении (Лемма Морса) распадается на несколько невырожденных [11].

Точка пересечения ударной поляры с вершиной основной поляры (рис. 4 слева) является вырожденной, а точка касания поляры и оси ординат (рис. 4 справа) – дважды вырожденной.

Закон Морса [11]. Функции общего положения (в физических терминах, устойчивые) имеют лишь невырожденные критические точки. Вырожденные критические точки появляются естественным образом только в тех случаях, когда функция зависит от параметра.

Таким образом, УВС, соответствующие на плоскости поляр вырожденным критическим точкам, реализовываться не должны.

Исследование семейств функций, зависящих от параметра, встречаются в математической физике повсеместно. Классификация их простейших особенностей во многих совершенно различных задачах, таких как: лагранжевы особенности (каустики, ударные волны и скачки уплотнения), лежандровы особенности (волновые фронты), лежандровы кобордизмы (след на зем-

ле от ударной волны, вызванной летящим на высоте сверхзвуковым самолетом) обнаруживает удивительную общность. Классификация тройных конфигураций в теории УВС весьма напоминает классификацию тройных точек в теории фазовых переходов второго рода в термодинамике и, с другой

стороны, классификацию особенностей в задаче об огибании препятствия. Все эти совпадения объясняются общностью математического аппарата анализа так называемого множества Максвелла. В популярной форме все эти вопросы излагаются в монографии Гилмора [6].

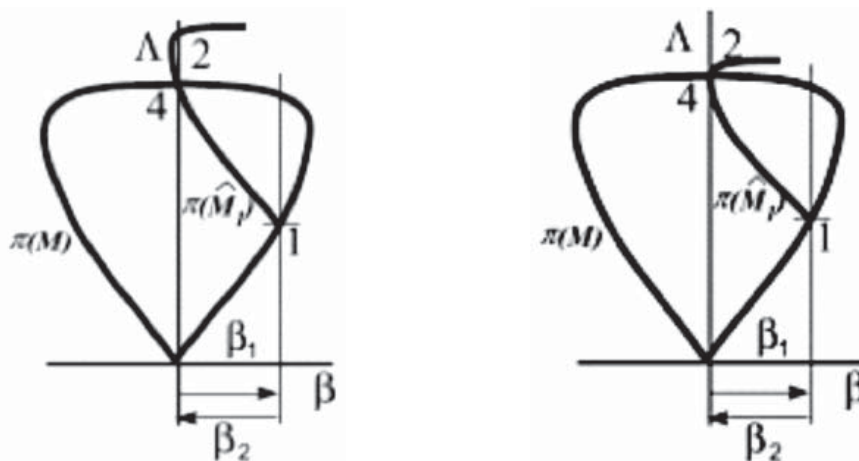


Рис. 4. Вырожденная (слева) и дважды вырожденная точка на плоскости поляра

Большой вклад в создание полной классификации возможных перестроек ударных волн внесли Богаевский [4], Гурбатов и Саичев [7] (1983 г.), которые, в частности, отметили, что множество типичных перестроек ударных волн меньше множества типичных перестроек множества Максвелла. Допустимые перестройки обусловлены импульсными ограничениями на пространственный тип уравнения Бюргерса, определяющей соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби (о функции Гамильтона, канонических формах, консервативных и диссипативных механических системах см. [3]).

При отражении скачка от стенки при числах Маха меньших M_{0R} и интенсивности, равной J_R , в стационарном случае поляры содержат вырожденную критическую точку. Если же мы рассматриваем нестационарный случай, то в задаче появляется параметр «время» (третья ось t), и никакой вырожденной точки нет, трехмерная поляра просто пересекает плоскость $J-t$. Таким образом, в нестационарном случае маховское отражение от стенки возможно, а в стационарном нет, что и подтверждается экспериментом.

Поскольку симплектическая геометрия, являющаяся методической базой классической механики, это геометрия четно-мерных пространств, то можно предположить, что в трехмерной нестационарной задаче маховские структуры при числах Маха, меньших M_{0R} , также не возникнут.

Теорема Богаевского. Необходимым и достаточным условием реализуемости перестройки множества Максвелла является требование, чтобы локальная ударная волна, рожденная в момент перестройки, при малом изменении параметра была стягиваема в окрестности точки перестройки [4].

Теорема Барышниковой. При малом изменении параметра тип дополнения к ударной волне в точке перестройки должен быть топологически неизменным [11].

В осесимметричной струе идеального газа формально тройную точку на висячем скачке можно расположить в различных сечениях. Тройная конфигурация должна содержать скачки с наименьшими из возможных интенсивностями (в соответствии с принципом наименьшего действия лагранжевой механики). При числе Маха, большем M_{0R} , образование тройной конфигурации с диском Маха на скачке в точке с интенсивностью, меньшей J_0 , невозможно вследствие теоремы Барышниковой. Действительно, интенсивность висячего скачка в данной задаче является параметром. Если бы перестройка произошла раньше, при $J < J_0$, то при дальнейшем изменении параметра J в момент $J = J_0$ конфигурация скачков топологически изменилась бы, т.к. кривизна τ скачком стала бы отрицательной.

Если число Маха перед скачком меньше M_{0R} , то $J_R < J_0$. Казалось бы, в качестве критерия образования диска Маха нужно принять равенство интенсивности висячего скачка J_R . Однако решение на плоскости

поляр, соответствующее данному случаю, содержит вырожденную критическую точку. Кроме того, нарушается теорема Богаевского, т.к. при малом изменении параметра (интенсивности висячего скачка) в сторону увеличения точка пересечения поляр скачком переходит на сильную ветвь основной ударной поляры, т.е. решение *нестягиваемо* в окрестности точки перестройки.

Итак, образование диска Маха в струе идеального газа происходит в точке висячего скачка, в которой его интенсивность становится равной J_0 . Это справедливо для любых чисел Маха больших особого числа M_T

$$M_T = \sqrt{\frac{3+\gamma}{2}}.$$

Расчеты удаления и диаметра диска Маха при помощи модели J_0

С целью практического обоснования модели были проведены систематические расчеты перерасширенных струй, истекающих из конического и профилированного соп-

ла. Выбор для анализа перерасширенных струй был обусловлен простотой течения перед скачком в таких струях, представляющих собой продолжение течения по соплу. В недорасширенных же струях структура течения перед скачком намного сложнее, содержит веер волн сжатия, слабые разрывы, что осложняет расчет геометрии УВС. Построение падающего скачка уплотнения в перерасширенной струе производилось с помощью решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих его геометрию [5], в каждой точке скачка его интенсивность сравнивалась с $J_0(M)$. Точка, в которой в пределах заданной точности выполнялось условие $J = J_0$, считалась местом зарождения диска Маха. На рис. 4 приведено сравнение результатов расчетов диаметра диска Маха и его расстояния от среза сопла с численным методом (модель идеального газа). На рис. 5 результаты численных расчетов показаны затененными областями, соответствующими «размытию» скачков на несколько разностных ячеек.

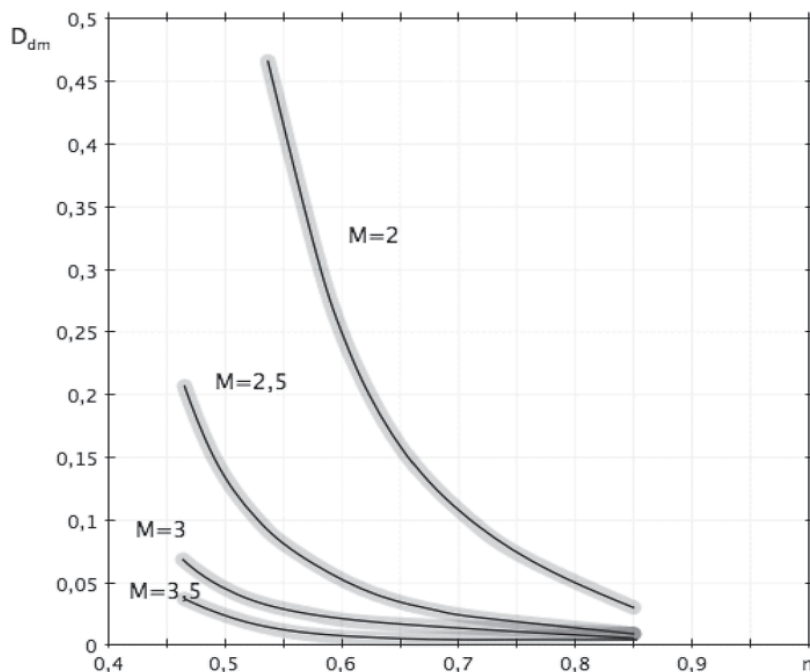


Рис. 5. Зависимость диаметра диска Маха от числа Маха M и нерасчетности n в перерасширенной струе, истекающей из профилированного сопла

Результаты расчетов хорошо соответствуют как численным методам, так и сложившимся на основе экспериментальных исследований представлениям о зависимости диаметра диска Маха от основных параметров сверхзвуковой струи.

Для более тщательной проверки модели J_0 был произведен ряд экспериментов

на соплах с углом полураствора сопла от 8 до 15°. При расчетах течение газа по соплу моделировалось течением от точечного источника. Известно, что чем больше угол полураствора сопла, тем сильнее отличается течение на срезе сопла от модели течения от источника, поэтому дополнительно были выполнены прове-

рочные численные расчеты с помощью sst-модели турбулентности без разрешения пограничного слоя на стенках сопла. Экспериментальные данные должны при

этом располагаться между двумя расчетными кривыми. Расчеты (рис. 6) показали очень хорошее качественное совпадение результатов.

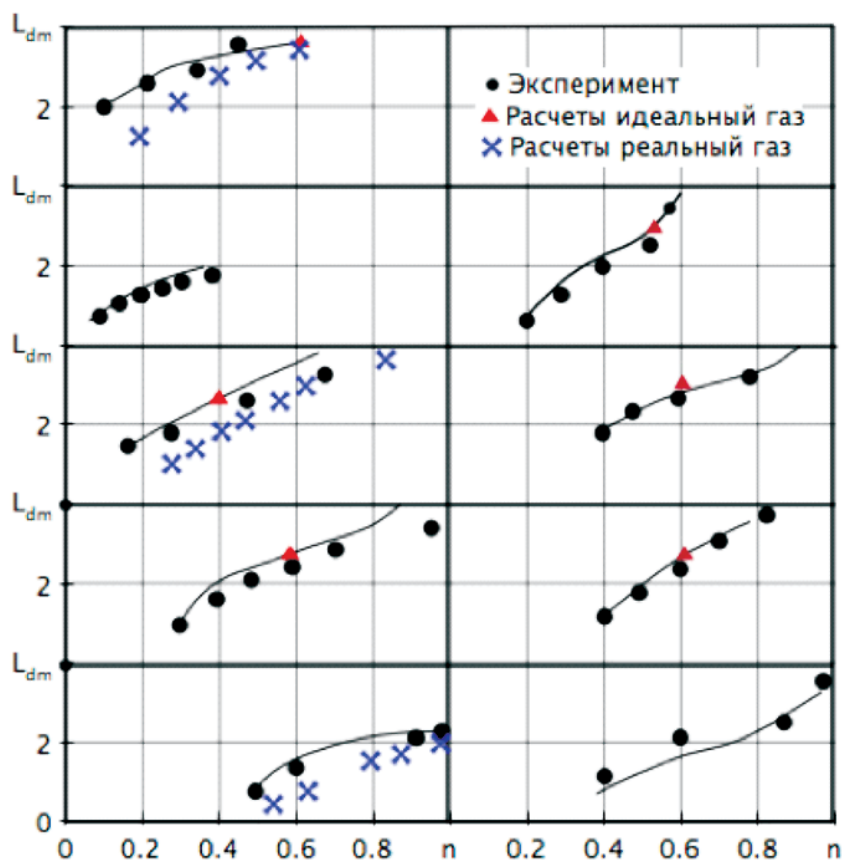


Рис. 6. Расчеты удаления Диска Маха в струях, истекающих из конического сопла

Выводы

Продемонстрировано, что модель стационарной маховской конфигурации с удовлетворительной для практики точностью позволяет предсказывать положение диска Маха в сверхзвуковой струе. С помощью аппарата анализа особенностей семейств функций, зависящих от параметра, показано, что в рамках модели идеального газа предположение о равенстве в точке зарождения диска Маха интенсивности приходящего скачка J особой интенсивности J_{02} соответствующей стационарной маховской конфигурации, выполняется строго. Данный факт является важным дополнением теории интерференции стационарных газодинамических разрывов.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ФАЗИС, 1997. – 180 с.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Том 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
4. Богаевский И.А. Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнений Бюргера с исчезающей вязкостью. Алгебра и анализ, 1989. – 1 (4). – С. 1–16.
5. Булат П.В., Засухин О.Н., Усков В.Н. Формирование струи при плавном запуске сопла Лавала.// Ученые записки Санкт-Петербургского государственного университета. Серия математических наук. «Газодинамика и теплообмен». Выпуск 10. Течения газов в каналах и струях. – СПб.: Изд-во СПУ, 1993. – С. 1–22.

6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Кн. 1 / пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
7. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // Успехи физ. наук. – 1983. – 141 (2). – С. 221–255.
8. Засухин О.Н., Булат П.В., Продан Н.В. Особенности применения моделей турбулентности при расчете сверхзвуковых течений в трактах перспективных воздушно-реактивных двигателей // Двигатель. – 2012. – № 1(70). – С. 20–23.
9. Интерференция стационарных газодинамических разрывов / В.Н. Усков и др. – Новосибирск: ВО «Наука», 1995. – 180 с.
10. Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов // Сверхзвуковые газовые струи. – Новосибирск: наука. 1983. – С. 82–96.
11. Arnold N.I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma / Comm. Pure Appl. Math. – 1976. – 29(6). – P. 557–582.
6. Gilmor R. Prikladnaja teorija katastrof. V 2-h knigah. Kn. 1. Per. s angl. M.: Mir, 1984. 350 p.
7. Gurbatov S.N., Saichev A.I., Jakushin I.G. Nelinejnye volny i odnomernaja turbulentsnost' v sredah bez dispersii. Usp'ehi fiz. Nauk., 1983, 141 (2), pp. 221–255.
8. Zasuhin O.N., Bulat P.V., Prodan N.V. Osobennosti primeneniya modelej turbulentsnosti pri raschete sverhzvukovyh techenij v traktah perspektivnyh vozdušno-reaktivnyh dvigatelej. Dvigatel' № 1(70) 2012, pp. 20–23.
9. Uskov V.N. i dr. Interferencija stacionarnyh gazodinamicheskih razryvov. – Novosibirsk: VO «Nauka», 1995. 180 pp.
10. Uskov V.N. Interferencija stacionarnyh gazodinamicheskih razryvov. Sverhzvukovye gazovye strui, Novosibirsk: nauka. 1983, pp. 82–96.
11. Arnold N.I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. Comm. Pure Appl. Math., 1976, 29(6), 557–582.

References

1. Arnol'd V.I. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi. M.:FAZIS, 1997, 180 p.
2. Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusejn-Zade S.M. Osobennosti differenciruemyh otobrazhenij. Tom 1. Klassifikacija kriticheskikh toчек, kaustik i volnovykh frontov. M.: Nauka, 1982, 304 p.
3. Berzhe P., Pomo I., Vidal' K. Porjadok v haose. M.: Mir, 1991. 368 p.
4. Bogaevskij I.A. Perestrojki osobennostej funkcij minimuma i bifurkacii udarnykh voln uravnenij Bjurgersa s ischezajucej vjazkost'ju. Algebra i analiz, 1989, 1 (4), pp. 1–16.
5. Bulat P.V., Zasuhin O.N., Uskov V.N. Formirovanie strui pri plavnom zapuske sopla Lavalja. // Uchenye zapiski Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija matematicheskikh nauk. «Gazodinamika i teploobmen». Vypusk 10. Tehenija gazov v kanalakh i strujah. SPb, Izd-vo SPU, 1993 g. pp. 1–22.

Рецензенты:

Баранов И.В., д.т.н., профессор, заместитель директора Института холода и биотехнологий ФГБОУ «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики», г. Санкт-Петербург;

Пеленко В.В., д.т.н., профессор, заместитель директора по учебной работе Института холода и биотехнологий ФГБОУ «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики». г. Санкт-Петербург.

Работа поступила в редакцию 20.07.2012.