



УДК 551.466

МОДЕЛИРОВАНИЕ УКРУЧЕНИЯ ПРОФИЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДЬЕ

Аббасов И.Б.

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: iftikhar abbasov@mail.ru

В работе описывается процесс трансформации профиля нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье. Представлены профили поверхностных гравитационных волн на этапах заострения гребней, укручения их переднего фронта. Рассмотрено влияние спектральных составляющих на процесс укручения профиля поверхностной волны. Проведены анализ и сравнение результатов работы с натурными экспериментами.

Ключевые слова: нелинейные поверхностные гравитационные волны, мелководье, трансформация профиля, заострение гребня волны, укручение фронта

MODELLING OF CRESTS THE PROFILE OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY WAVES ON SHALLOW-WATER

Abbasov I.B.

Taganrog institute of technology Southern federal university, Taganrog, e-mail: iftikhar abbasov@mail.ru

This article describes transformation of nonlinear surface gravity waves under shallow-water conditions with the aid of the suggested semigraphical method. There are given profiles of surface gravity waves on the crests steepening stages, their leading edges steepening. There are discussed the spectral component influence on the transformation of surface wave profile. The analysis and comparison of results the researches with natural experiments is carried out.

Keywords: nonlinear surface gravity waves, shallow-water, transformation of profile, crests steepening stages of wave, steepening of the wave leading edge

В условиях мелководья поверхностными гравитационными волнами достаточно давно интересуются многие исследователи. Из недавних работ можно отметить статью [10], посвященную исследованию поверхностных волн в прибрежной зоне в рамках мелководной модели. Процессы трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне рассмотрены в работе [3]. В работе [4] исследован процесс деформации поверхностной волны на мелководье, оценены амплитуды спектральных составляющих нелинейной волны по её крутизне. Экспериментальные данные по трансформации профиля нелинейных поверхностных волн в прибрежной зоне представлены в работе [5].

Постановка задачи

В работе [1] рассматривалась задача распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководья. Методом последовательных приближений было решено нелинейное уравнение. Как уравнение мелкой воды, так и метод последовательных приближений стоят у истоков исследования нелинейных волновых явлений [6].

Точное решение уравнения мелкой воды без дисперсии и диссипации представляются Римановы инвариантами, основанными на разных скоростях распространения вершин и впадин волны [8]. При этом уравнение

мелкой воды не учитывает дисперсионные эффекты из-за её слабости на мелкой воде.

Поверхностные гравитационные волны на мелководье в приближении слабой нелинейности и слабой дисперсии описываются хорошо известным уравнением Кортевега и де Вриза [8]. Однако неизменность форм кноидальных волн не позволяет проследить динамику нелинейных поверхностных гравитационных волн при распространении по мелководью.

В данной работе описывается процесс трансформации профиля поверхностной волны при распространении на мелководье. Представлено описание не только начального процесса заострения гребня волны, но и дальнейшее укручение её переднего фронта. Для этого используется графоаналитический способ на основе закона сохранения энергии, представленный в работе [1].

Метод исследований

Метод последовательных приближений является наиболее прямым путем решения нелинейных уравнений [2]. Здесь используется разложение по малому параметру ε (ε << 1), ограничиваясь первыми двумя членами при условии $u^{(n+1)}$ << $u^{(n)}$. При этом предполагаются малые значения нелинейности.

Для описания поверхностных гравитационных волн на мелкой воде можно ис-





пользовать следующее нелинейное уравнение [2, 8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x},\tag{1}$$

где $u=\vartheta_x$ — горизонтальная компонента скорости частиц среды, нелинейность $\varepsilon=\frac{\vartheta_x}{c}=\frac{a}{H}$, скорость распространения гравитационных волн $c=\sqrt{gH}$, a — амплитуда вертикального смещения свободной поверхности, H — глубина жидкости. Уравнение (1) является частью уравнения Кортевега и де Вриза, без дисперсии.

При распространении начальной гармонической волны на мелководье в результате

нелинейных эффектов возникает вторая гармоника. С ростом второй гармоники начнет усиливаться её взаимодействие с основной гармоникой. Это взаимодействие приводит к возбуждению третьей, четвертой и т.д. гармоник. Метод последовательных приближений применяется в два этапа. В результате первого этапа возникает вторая гармоника. Во втором этапе в результате взаимодействия основной волны
$$k$$
 со второй $2k$ возникают вторичные волны с удвоенными значениями $2k$, $4k$, и комбинационные волны k и $3k$. Появление в спектре высших гармоник приводит со временем к искажению профиля волны.

Решение нелинейного уравнения (1) в двух приближениях для горизонтальной скорости частиц среды имеет вид [1]

$$u_{\text{BT}}(x,t) = \varepsilon u_{\text{перв}}^{(1)}(x,t) + \varepsilon^{2} u_{\text{BT}}^{(2)}(x,t) = \left[\varepsilon^{2} U_{0} \exp(ikx) - ikt\varepsilon^{3} U_{0}^{2} \exp(2ikx)\right] + \left[kt^{2} \varepsilon^{5} U_{0}^{3} \cdot k_{1} \exp\left[ik_{1}x\right] + \left(t\varepsilon^{4} U_{0}^{2}/2\right) \cdot ik_{2} \exp\left[ik_{2}x\right] + \left(t\varepsilon^{4} U_{0}^{2}/2\right) \cdot ik_{3} \exp\left[ik_{3}x\right] + \left(-k^{2} t^{3} \varepsilon^{6} U_{0}^{4}/2\right) \cdot ik_{4} \exp\left[ik_{4}x\right] + \left[+(\kappa.c.)\right].$$
(2)

Моделирование трансформации поверхностных волн в условиях залива

Для проверки полученных результатов воспользуемся гидрологическими условиями Таганрогского залива Азовского моря. Средняя глубина Таганрогского залива не превышает 5 м, поэтому условиям мелководности будут удовлетворять гравитационные волны с длинами свыше 30 м, дно ровное, поверхностное натяжение отсутствует, влияние ветра не учитывается.

Прежде чем перейти к расчетам, следует отметить некоторые физические особенности происходящих волновых процессов. В выражении (2) амплитуды всех гармоник из-за вековых членов со временем растут. Однако по выражению амплитуда основной гармоники при этом остается постоянной, хотя высшие гармоники энергетически подпитываются от основной гармоники.

Следовательно, амплитуда первичных волн в выражении (2) $u_{\text{перв}}^{(1)}(x,t)$ должна со временем уменьшаться. Поэтому для исследования искажений профиля гравитационной волны необходимо учитывать эти физические особенности волновых процессов, в противном случае это приведет к нарушению закона сохранения энергии.

Проследим изменения профиля гравитационной волны после вхождения в залив с исходными параметрами: частота f=0.09 Гц; длина $\lambda=77.8$ м; начальная крутизна $2a/\lambda=0.014$; a=0.537 м; kH=0.4. Для данной волны неустойчивость наступает на расстоянии $-x_{\rm xap}^{(2)}\approx 10$ км (т.е. через $t_{\rm xap}^{(2)}\approx 24$ мин). Однако наша модель

является корректной до расстояния $x \approx 6$ км, т.е. до тех пор, пока выполняется первичное условие $u^{(n+1)} << u^{(n)}$, когда значение для второго приближения на порядок меньше значения для первого приближения.

С ростом суммарной амплитуды вторичных волн амплитуды первичных волн и основной гармоники падают. Амплитуда второй гармоники медленно нарастает и к моменту неустойчивости резко падает, так как происходит полная перекачка энергии от первичных волн (основная волна и вторая гармоника) вторичным волнам.

С увеличением начальной крутизны расстояние неустойчивости уменьшается, с увеличением частоты волны (при постоянной крутизне) это расстояние увеличивается, т.к. уменьшается значение нелинейного параметра.

Волна с изначально косинусоидальным профилем за время пробега постепенно искажается, гребни заостряются, а впадины становятся все более пологими. В дальнейшем происходит укручение переднего фронта волны. Это является результатом возрастающего влияния высокочастотных гармоник. Возрастание скорости частиц на гребне приводит к дальнейшему укручению переднего фронта волны. Обрушение такой волны на мелководье может происходить по типу ныряющего или скользящего буруна [7]. Причиной обрушения в нашем случае, естественно, является глубина жидкости.

Следует подчеркнуть, что для возникающих высших гармоник условие мелководности может и не соблюдаться. А это может привести к появлению дисперсии скорости





распространения, что может вызвать торможение нелинейных процессов. Но при подходе к берегу из-за уменьшения глубины условие мелководности будет выполняться лучше и, следовательно, произойдет обрушение волны.

Анализ и сравнение результатов

Анализируя построенные профили поверхностных гравитационных волн, необходимо отметить следующие их особенности. Из натурных наблюдений известно, что профиль реальных поверхностных волн асимметричен: гребни относительно крутые и короткие, заостренные, а впадины пологие и широкие [5]. Эти особенности объясняются теорией Стокса появлением высокочастотных гармоник основной волны. Такие профили приобретают поверхностные волны для нашего рассмотрения на начальных участках распространения.

Кроме описанного типа асимметрии, ещё наблюдается другой тип асимметрии профиля реальных поверхностных волн. Он выражается в том, что передний склон трансформирующейся волны становится более крутым, чем задний [7]. Это различие в крутизне склонов увеличивается с приближением к берегу. Этот тип асимметрии профиля реальных поверхностных волн не описывается теорией Стокса, а также большинством других теорий. Хотя для описания процесса набегания волн из открытого моря на берег Дж. Уиземом было предложено уравнение с интегральным членом на основе уравнения Кортевега и де Вриза. На этапе обрушения волн действие интегрального члена становится незначительным и решения уравнения Уизема ведут себя аналогично решениям простейших уравнений с нелинейностью (аналогично уравнению (1)), опрокидываясь и разрушаясь за конечное время [8].

Для нашего рассмотрения профили поверхностных волн на третьем участке распространения как раз и приобретают второй вид асимметрии. При этом укручение становится все более выраженным с увеличением длины волны, т.е. с увеличением коэффициента нелинейности.

Одно из объяснений укручения переднего склона гребня заключается в том, что высшие гармоники постепенно смещаются по фазе относительно основной волны [2, 8]. Когда сдвиг фаз достигает значения $\pi/2$, передний склон становится почти вертикальным, в результате чего волна может обрушиться. В полученном нами окончательном выражении для горизонтальной скорости частиц (2) амплитуды четных гармоник являются мнимыми. С возрастанием

амплитуды вторичных волн эта мнимость начинает ощущаться сильнее, чем в начале, так как она приводит к сдвигу фаз относительно амплитуды основной волны. Следует отметить, что в теории Стокса разность фаз между основной волной и высшими гармониками отсутствует, т.е. она не описывает процесс укручения переднего склона гребня волны.

Для выявления влияния четных гармоник, а особенно четвертой гармоники на профиль поверхностной гравитационной волны на рисунке представлены графики горизонтальной скорости u(x, t) частиц среды для одинакового участка пути распространения. Особое влияние четвертой гармоники связано с её наиболее быстрым ростом, следовательно, наибольшей энергоемкостью среди вторичных волн. На рисунке (а) приведен профиль поверхностной волны, рассчитанный согласно выражению (2), когда четвертая гармоника по фазе отстает от основной волны на $\pi/2$. На рисунке (б) представлен профиль волны для случая, когда мнимость амплитуды четвертой гармоники заменена на вещественность, т.е. фазовый сдвиг между гармоникой и основной волной отсутствует. При этом амплитуда четвертой гармоники имеет отрицательный знак, следовательно, вычитается из амплитуды основной волны. Это приводит к симметричности гребня волны относительно вертикальной оси.

В выражении (2) амплитуда только четвертой гармоники имеет отрицательный знак. Замена отрицательного знака на положительный знак приводит к смене укручения переднего фронта гребня волны на задний фронт. Этот случай представлен на рисунке (в), что напоминает профиль волны, повернутой вспять, волна распространяется в обратном направлении. В данном случае четвертая гармоника опережает по фазе основную волну на $\pi/2$. Если в выражении (2) одновременно заменить отрицательный знак перед амплитудой четвертой гармоники на положительный, также мнимость четвертой гармоники на вещественность, то профиль волны примет вид, как на рисунке (г). В этом случае амплитуда четвертой гармоники суммируется с амплитудой основной волны синфазно, усиливая заострение гребня волны. Данный профиль напоминает стоксовые волны конечной амплитуды на глубокой воде.

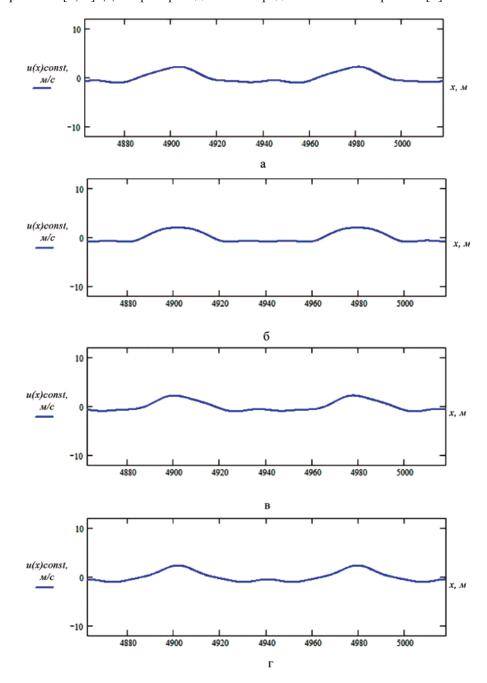
Следует обратить внимание также на появление местного возвышения в ложбине между гребнями. Это возвышение тоже связано с четвертой гармоникой, и оно меняет свою локализацию в зависимости от фазы. Экспериментальные наблюдения с





появлением возвышения между основными гребнями волны в береговой зоне представлены в работах [5, 9]. Для проверки досто-

верности полученных результатов сравним их с экспериментальными исследованиями, представленными в работе [9].



Влияние четвертой гармоники на профиль поверхностной гравитационной волны: a- отстает от основной волны на $\pi/2$; 6- синфазно вычитается; 8- опережает основную волну на $\pi/2$; $\epsilon-$ синфазно суммируется; частота f=0.09 Γ μ ; длина $\lambda=77.8$ м; начальная крутизна $2a/\lambda=0.014$; a=0.537 м; kH=0.4

В работе [9] представлены экспериментальные данные японских учёных по распространению поверхностной волны над ступенчатым горизонтальным дном с наклонными подъемами разной крутизны. Протяженность лабораторной установки 1,7 м, глубина 0,4 м,

крутизна подъема между горизонтальными ступенями 1/5; 1/10; 1/40, период волны T=1,69 с. Волны перед генератором имеют симметричные профили, в процессе распространения по лабораторному полигону происходит вначале заострение гребней волны.





В дальнейшем происходит укручение их переднего фронта, появляется также промежуточный гребень во впадине волны. Аналогичные искажения для расчетного профиля поверхностной волны для нашего рассмотрения можно наблюдать на рисунке (а) на этапе укручения переднего фронта гребней.

Для дна с более пологим подъемом 1/40 нелинейные искажения профиля начинаются фактически в начале пути распространения из-за уменьшения глубины лабораторного полигона.

Выволы

В результате проведенных исследований можно отметить, что предложенный графоаналитический способ позволяет описать не только процесс начального заострения гребней поверхностных волн при распространении по мелководью, но и последующее укручение их переднего фронта.

Список литературы

- 1. Аббасов И.Б. Исследование и моделирование нелинейных поверхностных волн на мелководье // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39, N 4. С. 568—573.
- 2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.

- 3. Галенин В.Г., Кузнецов В.В. Моделирование трансформации волн в прибрежной зоне // Водные ресурсы. 1980. № 1. С. 156–165.
- 4. Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье / И.И. Диденкулова, Н. Заибо, А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42, № 6. С. 839–842.
- 5. Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В. Экспериментальные исследования эволюции групп волн в береговой зоне моря // Океанология. -2002. Т. 42, № 3. С. 356–363.
- 6. Лемб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 524 с.
- 7. Леонтьев И.О. Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001. 272 с.
- 8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.-622 с.
- 9. Goda Y., Morinobu K. Breaking wave heights on horizontal bed affected by approach slope // Coastal Engineering Journal. -1998. Vol. 40, N_2 4. P. 307–326.
- 10. Peregrine D.H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, No 4. P. 815–827.

Рецензенты:

Захаров А.Г., д.т.н., профессор, профессор кафедры физики Технологического института Южного федерального университета, г. Таганрог;

Куповых Г.В., д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой физики Технологического института Южного федерального университета, г. Таганрог.

Работа поступила в редакцию 20.05.2011.