TECHNICAL SCIENCES

УДК 539.9:624.044:514.74

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ ПРИ ТЕНЗОРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАСЧЕТНЫХ ВЕЛИЧИН

Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Волгоград, e-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

Для расчета оболочек вращения разработан объемный конечный элемент в форме шестигранника с узловыми неизвестными в виде компонент вектора перемещений и компонент тензора напряжений. Для выражения компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и компонентов ее тензора напряжений через узловые неизвестные использовался способ интерполяции векторных и тензорных полей трилинейными функциями формы, что позволило в неявном виде учесть смещение конечного элемента как жесткого целого. Для формирования матрицы деформирования шестигранника использовался вариационный принцип в смешанной формулировке. На примере показана эффективность предложенного способа аппроксимации искомых величин как векторных и тензорных полей.

Ключевые слова: векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип

CALCULATION OF SHELLS OF REVOLUTION BASED ON A MIXED FEM FOR THE TENSOR APPROXIMATION OF THE NODAL UNKNOWNS

Gureyeva N.A., Klochkov Y.V., Nikolaev A.P.

Volgograd State Agricultural Academy, Volgograd, e-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

For the calculation of shells of revolution developed a finite volume element in the form of the hexagon with the nodal unknowns as components of the displacement vector and stress tensor components. To express the components of the displacement vector of internal points of the finite element and its components of the stress tensor through the nodal unknowns used interpolation method of vector and tensor fields trilinear shape function, which allowed us to implicitly take into account the displacement of a finite element as a rigid body. To form the matrix strain hexahedron used a variational principle for the mixed formulation. On the example shows the effectiveness of the proposed method of approximating the unknown quantities as vector and tensor fields in comparison with the traditional method for approximating the unknown quantities as scalar fields.

Keywords: vector approximation, the tensor approximation, vector field, tensor field, the mixed formulation, variational principle

Основные уравнения метода конечных элементов (МКЭ) могут быть получены на основе различных формулировок. Самыми распространенными являются формулировки в форме метода перемещений [1, 2]. Используется также формулировка в форме метода сил [3] и, более широко, в смешанной форме [3, 4] при аппроксимации перемещений и напряжений как скалярных величин.

При реализации МКЭ в форме метода перемещений общеизвестной является проблема учета смещения элемента как жесткого целого [1]. Учет смещения элемента как твердого тела является проблемой и при реализации МКЭ в смешанной формулировке. В настоящей работе предлагается решение этой проблемы в смешанной формулировке МКЭ на основе аппроксимации перемещений и напряжений как векторных и тензорных полей при формировании матрицы деформирования шестигранного объемного конечного элемента. Ĥа примерах показана эффективность предложенной аппроксимации искомых неизвестных.

1. Геометрия оболочки. Радиус-вектор произвольной точки *M* срединной поверхности оболочки (рис. 1a) определяется выражением

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + r\cos\theta\mathbf{k},\qquad(1)$$

где **i**, **j**, **k** – орты декартовой системы координат; x – осевая координата; θ – угловая координата; r – радиус вращения произвольной точки.

С использованием (1) определяются векторы локального базиса в произвольной точке срединной поверхности $\{a\}^{T} = \{a_{1}, a_{2}, a\}$ и их производные, выраженные в этом же базисе

$$\{\mathbf{a}_{s}\} = [m]\{\mathbf{a}\}; \{\mathbf{a}_{\theta}\} = [n]\{\mathbf{a}\}, (2)$$

где *s* – меридиональная координата; $\{\mathbf{a}_{,s}\}^{T} = \{\mathbf{a}_{1}, \mathbf{a}_{2}, \mathbf{a}_{,s}\}^{T} = \{\mathbf{a}_{1}, \mathbf{a}_{2}, \mathbf{a}_{,s}\}^{T} = \mathbf{b}$ ектор-строка производных базисных векторов по координате *s*; $\{\mathbf{a}_{,\theta}\}^{T} = \{\mathbf{a}_{1}, \mathbf{a}_{2}, \mathbf{a}_{,\theta}\}^{T} = \mathbf{b}$ ектор-строка производных базисных векторов по координате θ ; [m], [n] – матрицы коэффициентов.



и – фригмент воблючки врищения в бекиртовой системе координат; б – шестигранный восьмиузловой конечный элемент; в – конечный элемент в локальной системе координат

2. Перемещения и деформации. Радиус-вектор точки M^t , отстоящей на расстоянии t от срединной поверхности оболочки, в исходном состоянии определяется выражением

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R} + t\mathbf{a},\tag{3}$$

а радиус-вектор этой точки в деформированном состоянии оболочки можно представить в виде

$$\mathbf{R}^{*t} = \mathbf{R}^t + \mathbf{V}.$$
 (4)

Вектор перемещения произвольной точки *M*^{*t*} представим компонентами в локальном базисе в виде

$$\mathbf{V} = \upsilon^1 \mathbf{a}_1 + \upsilon^2 \mathbf{a}_2 + \upsilon \mathbf{a}. \tag{5}$$

Производные вектора перемещения по координатам s, θ , t с учетом (2) представим выражениями:

$$\mathbf{V}_{,s} = f_1^1 \mathbf{a}_1 + f_1^2 \mathbf{a}_2 + f_1^3 \mathbf{a};$$

$$\mathbf{V}_{,\theta} = f_2^1 \mathbf{a}_1 + f_2^2 \mathbf{a}_2 + f_2^3 \mathbf{a};$$
 (6)

$$\mathbf{V}_{t} = \mathbf{v}_{t}^{1} \mathbf{a}_{1} + \mathbf{v}_{t}^{2} \mathbf{a}_{2} + \mathbf{v}_{t} \mathbf{a}_{1},$$

где $f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_2^1, f_2^2, f_2^3$ – функции компонент вектора перемещения и их производных.

Векторы, касательные к произвольной поверхности в исходном и деформированном состояниях, определяются дифференцированием (3), (4)

 $\mathbf{g}_{i} = \mathbf{R}_{i}^{t} = \mathbf{a}_{i} + t \mathbf{a}_{i};$ $\mathbf{g}_{i}^{*} = \mathbf{R}_{i}^{*t} = \mathbf{g}_{i} + \mathbf{V}_{i},$

где под символом i понимаются координаты s, θ, t .

Ковариантные компоненты тензора деформаций в произвольной точке определяются как разности компонент метрических тензоров деформированного и исходного состояния соотношениями

в

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \mathbf{g}_{1} \cdot \mathbf{V}_{,s}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{22} = \mathbf{g}_{2} \cdot \mathbf{V}_{,\theta}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{33} = \mathbf{g}_{3} \cdot \mathbf{V}_{,t};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \boldsymbol{\varepsilon}_{21} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{1} \cdot \mathbf{V}_{,\theta} + \mathbf{g}_{2} \cdot \mathbf{V}_{,s});$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{13} = \boldsymbol{\varepsilon}_{31} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{1} \cdot \mathbf{V}_{,t} + \mathbf{g}_{3} \cdot \mathbf{V}_{,s}); \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{23} = \boldsymbol{\varepsilon}_{32} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{2} \cdot \mathbf{V}_{,t} + \mathbf{g}_{3} \cdot \mathbf{V}_{,\theta}),$$

где

$$\mathbf{g}_1 = (1 + tm_{31})\mathbf{a}_1 + tm_{32}\mathbf{a}_2 + tm_{33}\mathbf{a};$$

$$\mathbf{g}_2 = tn_{31}\mathbf{a}_1 + (1+tn_{32})\mathbf{a}_2 + tn_{33}\mathbf{a}; \ \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}.$$

Учитывая (5), деформации (7) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [L]\{\upsilon\},\$$

где $\{\varepsilon\}^{T} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}$ – вектор-строка деформаций точки M^{t} ; $\{\upsilon\}^{T} = \{\upsilon^{12}\upsilon \ \upsilon\}$ – вектор-строка контравариантных компонент перемещений точки M^{t} ; [L] – матрица дифференциальных операторов.

3. Соотношения между деформациями и напряжениями. Закон Гука для изотропной среды имеет вид [1]

$$\{\varepsilon\} = [D] \{\sigma\},\$$

где $\{\sigma\}^{T} = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}$ – вектор-строка контравариантных компонент тензора напряжений в произвольной точке

срединной поверхности; [D] – матрица податливости материала.

Функционал Рейснера для оболочки вращения используется в модифицированном виде [2]

$$\Pi_{R} = \int_{V} \{\sigma\}^{T} [L] \{\upsilon\} dV - \frac{1}{2} \int_{V} \{\sigma\}^{T} [D] \{\sigma\} dV - \int_{V} \{\upsilon\}^{T} \{Y\} dV - \iint_{F} \{\upsilon\}^{T} \{q\} dF, \quad (8)$$

где V – объем оболочки; F – поверхность оболочки с заданными внешними силами; $\{Y\}^{T} = \{Y_{1} \ Y_{2} \ Y_{3}\}$ – строка массовых сил.

4. *Матрица деформирования конечносо элемента*. Конечный элемент выбран в форме шестигранника с узлами *i*, *j*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*, *h* (рис. 16). Для выполнения численного интегрирования глобальные координаты *s*,

$$\theta$$
, *t* аппроксимировались через локальные координаты куба $-1 \le \xi$, η , $\zeta \le 1$ (рис. 1.в) трилинейными соотношениями

$$\lambda = \left\{ f(\xi, \eta, \zeta) \right\}^{T} \left\{ \lambda_{y} \right\}, \qquad (9)$$

^{*г*де}
$$\{\lambda_{y}\}^{'} = \{\lambda^{i} \ \lambda^{j} \ \lambda^{k} \ \lambda^{l} \ \lambda^{m} \ \lambda^{n} \ \lambda^{p} \ \lambda^{h}\}^{-}$$

вектор-строка узловых значений величины λ ;

$$\begin{cases} f\left(\xi,\eta,\zeta\right) \end{cases}^{T} = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} : \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} : \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} : \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} : \frac{1-\xi}{2} : \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} : \frac{1-\xi}{2} : \frac{1$$

матрица-строка функций формы.

Под символом λ понимаются координаты *s*, θ , *t*.

Производные глобальных координат в локальной системе $s_{,\xi}$, $s_{,\eta}$, $s_{,\zeta}$, $\theta_{,\xi}$, $\theta_{,\eta}$, $\theta_{,\zeta}$, $t_{,\xi}$, $t_{,\eta}$, $t_{,\zeta}$ и локальных координат в глобальной системе $\xi_{,s}$, $\xi_{,\theta}$, $\xi_{,r}$, $\eta_{,s}$, $\eta_{,\theta}$, $\eta_{,r}$, $\zeta_{,s}$, $\zeta_{,\theta}$, $\zeta_{,\tau}$ определяются дифференцированием (9).

Векторные поля перемещений и тензорные поля напряжений внутренней точки конечного элемента аппроксимируются через узловые неизвестные также трилинейными соотношениями

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{U} &= \left\{ f(\xi, \eta, \zeta) \right\}^{T} \left\{ \mathbf{V}_{y} \right\}; \\ \sigma &= \left\{ f(\xi, \eta, \zeta) \right\}^{T} \left\{ \overline{\sigma}_{y} \right\}, \\ \mathbf{J} \mathbf{V}^{\mathbf{k}} \mathbf{V}^{\mathbf{l}} \mathbf{V}^{\mathbf{m}} \mathbf{V}^{\mathbf{n}} \mathbf{V}^{\mathbf{p}} \mathbf{V}^{\mathbf{h}} \right\} \end{aligned}$$
(10)

строка узловых векторов перемещений;

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{11}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{\sigma}^{22}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{\sigma}^{33}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{\sigma}^{12}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}^{13}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{\sigma}^{23}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2$$

- тензор напряжений внутренней точки конечного элемента;

 $\left\{\mathbf{V}_{\mathbf{y}}\right\}^{T} = \left\{\mathbf{V}^{\mathbf{i}} \mid \mathbf{V}\right\}$

$$\left\{\overline{\sigma}_{y}\right\}^{T} = \left\{\overline{\sigma}^{i} \quad \overline{\sigma}^{j} \quad \overline{\sigma}^{k} \quad \overline{\sigma}^{l} \quad \overline{\sigma}^{m} \quad \overline{\sigma}^{n} \quad \overline{\sigma}^{p} \quad \overline{\sigma}^{h}\right\}$$

- строка узловых тензоров напряжений.

Базисные векторы узловых точек выражаются через базисные векторы произвольной внутренней точки конечного элемента в виде $\{\mathbf{a}^{\omega}\} = [N^{\omega}]_{3\times 1} \{\mathbf{a}\}, \omega = i, j, k, l, m, n, p, h, (11)$

где $\left\{ \mathbf{a}^{\boldsymbol{\omega}} \right\}^T = \left\{ \mathbf{a}_1^{\boldsymbol{\omega}} \quad \mathbf{a}_2^{\boldsymbol{\omega}} \quad \mathbf{a}^{\boldsymbol{\omega}} \right\}$ – базисные векторы узловой точки.

С использованием (11) можно выразить диадные произведения базисных векторов узловой точки

$$\left\{\overline{a}_{1\times 6}^{-\omega}\right\}^{T} = \left\{\mathbf{a}_{1}^{\omega}\mathbf{a}_{1}^{\omega} \quad \mathbf{a}_{2}^{\omega}\mathbf{a}_{2}^{\omega} \quad \mathbf{a}^{\omega}\mathbf{a}^{\omega} \quad 2\mathbf{a}_{1}^{\omega}\mathbf{a}_{2}^{\omega} \quad 2\mathbf{a}_{1}^{\omega}\mathbf{a}^{\omega} \quad 2\mathbf{a}_{2}^{\omega}\mathbf{a}^{\omega}\right\}$$

через диадные произведения произвольной точки конечного элемента

$$\left\{ \overrightarrow{a} \right\}_{1 \times 6}^{T} = \left\{ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \quad 2\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \quad 2\mathbf{a}_1 \mathbf{a} \quad 2\mathbf{a}_2 \mathbf{a} \right\}$$

в матричной форме $\begin{cases}
\overline{a}^{\omega}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} G^{\omega}_{6\times 1} \end{bmatrix} \{\overline{a}^{\alpha}_{6\times 1}, \ \omega = i, j, k, l, m, n, p, h, (12)
\end{cases}$ где $\begin{bmatrix} G^{\omega}_{6\times 6} \end{bmatrix} -$ матрица коэффициентов, получаемая на основе (11).

где

Выражения тензоров напряжений внутренней и узловых точек конечного элемента в их базисах имеют вид [1]

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \overline{a} \right\}_{1 \times 6}^{T} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\};$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{\omega} = \left\{ \overline{a} \right\}_{1 \times 6}^{T} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{\omega} \right\}_{6 \times 1}^{T} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{\omega} \right\}, \quad (13)$$

$$\omega = i, j, k, l, m, n, p, h,$$

Столбец узловых векторов перемещений можно представить в матричном виде

$$\{V_{y}\} = [G]_{8\times 24} \{V_{y}\}_{24\times 1},$$

$$\left\{ V_{\mathcal{Y}} \right\}_{\substack{i \ge 24}}^{T} = \left\{ \upsilon^{1i} \quad \upsilon^{2i} \quad \upsilon^{i} \quad \upsilon^{1j} \quad \upsilon^{2j} \quad \upsilon^{j} \quad \dots \quad \upsilon^{1h} \quad \upsilon^{2h} \quad \upsilon^{h} \right\}$$

- строка скалярных узловых неизвестных; [G] – матрица, элементами которой являются базисные векторы узловых точек $\{a^{\omega}\}$.

После замены векторов $\{a^{\omega}\}$ в матрице [G] по (11) вектор перемещения внутренней точки конечного элемента и его производные по координатам *s*, θ , *t* можно записать в виде

где $f_1, f_2, ..., f_8 - функции, являющиеся эле$ $ментами аппроксимирующей матрицы <math>\{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T$.

С учетом (5) и (6) из соотношений (14) получаются матричные выражения для аппроксимации компонент вектора перемещений внутренней точки конечного элемента и их производных

$$\{\upsilon\} = [A] \{V_{y}\}; \quad \upsilon_{,s}^{1} = \{l_{1}\}^{T} \{V_{y}\}; \\ \upsilon_{,s}^{2} = \{l_{2}\}^{T} \{V_{y}\}; \quad \upsilon_{,s} = \{l_{3}\}^{T} \{V_{y}\}; \\ \upsilon_{,\theta}^{1} = \{l_{4}\}^{T} \{V_{y}\}; \quad \upsilon_{,\theta}^{2} = \{l_{5}\}^{T} \{V_{y}\}; \quad (15) \\ \upsilon_{,\theta} = \{l_{6}\}^{T} \{V_{y}\}; \quad \upsilon_{,t}^{1} = \{l_{7}\}^{T} \{V_{y}\}; \\ \upsilon_{,t}^{2} = \{l_{8}\}^{T} \{V_{y}\}; \quad \upsilon_{,t}^{2} = \{l_{9}\}^{T} \{V_{y}\}.$$

При скалярной аппроксимации перемещений соотношения (15) будут иметь вид

$$\{\upsilon\} = \begin{bmatrix} \{f\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{f\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{f\}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\upsilon_{y}^{1}\} \\ \{\upsilon_{y}^{2}\} \\ \{\upsilon_{y}^{2}\} \end{bmatrix};$$

$$\upsilon_{,s}^{1} = \{f,_{s}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{1}\}; \quad \upsilon_{,s}^{2} = \{f,_{s}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{2}\};$$

$$\upsilon_{,s} = \{f,_{s}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{1}\}; \quad \upsilon_{,\theta}^{1} = \{f,_{\theta}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{1}\};$$

$$\upsilon_{,\theta}^{2} = \{f,_{\theta}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{2}\}; \quad \upsilon_{,\theta} = \{f,_{\theta}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{2}\};$$

$$\upsilon_{,\theta}^{1} = \{f,_{t}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{1}\}; \quad \upsilon_{,t}^{2} = \{f,_{t}\}^{T} \{\upsilon_{y}^{2}\};$$

где

Как видим, при скалярной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и ее производные выражаются через узловые значения только этой компоненты.

При векторной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и ее производные выражаются через все компоненты векторов перемещений узловых точек элемента.

Столбец узловых тензоров напряжений, используя (13), представим в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma} \\ \overline{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ s < 48 \end{bmatrix} \{ \sigma_{y} \}$$
(16)

где
$$\left\{ \boldsymbol{\sigma}_{y} \right\}^{T} = \left\{ \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{i}^{i} \right\}^{T} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{i}^{j} \right\}^{T} \dots \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{i \times 6}^{h} \right\}^{T} \right\} -$$
строка

узловых неизвестных напряжений; $[\tau]$ – матрица, элементами которой являются строки диадных произведений $\{\overline{a}^{\omega}\}^{T}$.

После замены строк
$$\left\{ \overline{a}^{\omega} \right\}^{T}$$
 по (12) в ма-

трице [т] (16) тензор напряжений (10) внутренней точки конечного элемента можно представить соотношением TECHNICAL SCIENCES

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \overline{a} \right\}_{1 \times 6}^{T} \left[f_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \begin{bmatrix} G^i \end{bmatrix}^T f_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \begin{bmatrix} G^j \end{bmatrix}^T \dots f_8(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \begin{bmatrix} G^h \end{bmatrix}^T \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}.$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{BOPA}} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{6 \times 1}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{KOMIOHENTЫ TEH3OPA HA-} \right] \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right\}_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y \right]_{7}^{T} = \left[S \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y$$

Учитывая диадное представление (13) тензора σ , компоненты тензора напряжений внутренней точки конечного элемента на основании (16) представим в виде

При скалярной аппроксимации компонент тензора напряжений матрица [S] имеет вид

$$\begin{bmatrix} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{f\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{f\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{f\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{f\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} \\ \{0\}^{T} & \{0\}^{T} \\ \{0\}^$$

Как видим, при скалярной аппроксимации каждая компонента тензора напряжений внутренней точки конечного элемента выражается через узловые значения только этой компоненты.

При тензорной аппроксимации каждая компонента тензора напряжений внутренней точки зависит от всех компонент тензоров напряжений узловых точек конечного элемента.

Использование векторной аппроксимации (15) и тензорной аппроксимации (17) позволяет в неявной форме учитывать смещение конечного элемента как жесткого целого.

Принимая во внимание соотношения (17) и (15), запишем функционал (18) в виде

$$\Pi_{Ry} = \{ \sigma_{1\times48} \}^{T} \int_{V} [S]^{T} [B]_{Q} V \{ \upsilon_{24\times1} \}^{T} \frac{1}{2} \{ \sigma_{1\times48} \}^{T} \int_{V} [S]^{T} [D]_{6\times6} [S]_{d} V \{ \sigma_{y} \}^{-} \\ - \{ \upsilon_{y} \}^{T} \int_{V} [A]^{T} \{ Y \}_{3\times1} dV - \{ \upsilon_{y} \}^{T} \int_{F} [A]^{T} \{ q \}_{3\times1} dF.$$
(18)

Дифференцируя функционал (18) по узловым неизвестным $\{\sigma_y\}^T$ и $\{v_y\}^T$ и приравнивая производные нулю, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \left\{\sigma_y\right\}} = \begin{bmatrix} Q \\ 48 \times 24 \end{bmatrix} \left\{ v_y \\ 24 \times 1 \end{bmatrix} \left\{ -\begin{bmatrix} H \\ 48 \times 48 \end{bmatrix} \left\{ \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{bmatrix} = 0;$$
$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \left\{v_y\right\}} = \begin{bmatrix} Q \\ 24 \times 48 \end{bmatrix}^T \left\{ \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{bmatrix} \left\{ f_s \\ 24 \times 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (19)$$

где

ł

$$\begin{bmatrix} Q \\ 48 \times 24 \end{bmatrix} = \int_{V} \begin{bmatrix} S \\ 48 \times 6 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} B \\ 6 \times 24 \end{bmatrix} dV;$$
$$\begin{bmatrix} H \\ 48 \times 48 \end{bmatrix} = \int_{V} \begin{bmatrix} S \\ 48 \times 6 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ 6 \times 48 \end{bmatrix} dV;$$
$$\begin{bmatrix} f \\ s \\ 24 \times 1 \end{bmatrix} = \int_{F} \begin{bmatrix} A \\ 24 \times 3 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} q \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} dF + \int_{V} \begin{bmatrix} A \\ 3 \times 1 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} Y \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} dV.$$

Представим систему (19) в традиционной для МКЭ форме

$$\begin{bmatrix} k \\ T_{2} \\ T_{2}$$

формирования конечного элемента;

$$\left\{ Z_{y}^{R} \right\}^{T} = \left\{ \left\{ \sigma_{y}^{R} \right\}^{T} \left\{ \upsilon_{y}^{P} \right\}^{T} \right\} - \text{Bektop узло-}$$

вых неизвестных конечного элемента;

$$\left\{ f_{y}^{R} \right\}^{T} = \left\{ \left\{ 0 \right\}^{T} \left\{ f_{s}^{P} \right\}^{T} \right\} - \text{Bektop узловых}$$

_{72×1}

усилий конечного элемента.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].

Пример. Определено напряженное состояние усеченного параболоида вращения, внутренняя образующего которого описывается функцией

$$Z = \frac{D-A}{l^2}x^2 + A$$

Приняты следующие исходные данные (рис. 2): A = 0,2 м, D = 0,02 м, l = 0,5 м, h = 0,02 м, $E = 0,2 \cdot 10^6$ даH/см², $\mu = 0,3$, q = 100 даH/см². Рассматривалась 1/4 часть оболочки, которая разбивалась на 8 элементов по окружной координате, на 40 элементов по меридиану и на 2 элемента по толщине.

В узловых точках элементов на левом краю оболочки шарнирные опоры заменялись на пружинные (рис. 2), при изменении жесткости которых узловые точки на левом краю (и вся конструкция) получали перемещения v_{π}^{1} (см).



Рис. 2. Часть параболоида вращения

В таблице приведены численные значения физических меридиональных напряжений σ_{cp}^{21} и окружных напряжений σ_{cp}^{22} в точках 1, 2, 3, 4 (см. рис. 2). Как видно в точках 3 и 4, меридиональные напряжения почти равны нулю, а на левом краю среднее напряжение равно 465,93 даН/см². Среднее

напряжение, найденное из условия равновесия, равно

$$\sigma_{\rm cp}^{\rm II} = q \frac{\pi (A^2 - D^2)}{2\pi \left(A + \frac{h}{2}\right)h} = 471 \text{ gaH/cm.}^2$$

КИ	$v_{\pi}^{1} = 0,0000$		$v_{\pi}^{1} = 0,0393$		$v_{\pi}^{1} = 0,1969$		$v_{\pi}^{1} = 19,7074$		$v_{\pi}^{1} = 197,205$		$v_{\pi}^{1} = 1980, 13$	
Tou	σ_{cp}^{11}	σ_{cp}^{22}	σ_{cp}^{11}	σ_{cp}^{22}	σ_{cp}^{11}	σ^{22}_{cp}	σ_{cp}^{11}	σ_{cp}^{22}	σ_{cp}^{11}	σ_{cp}^{22}	σ_{cp}^{11}	σ_{cp}^{22}
1	453,70	897,56	493,13	932,49	494,46	933,63	494,81	933,92	494,83	933,94	495,05	934,17
2	478,04	822,58	438,72	831,27	437,63	831,56	437,32	831,64	437,30	831,64	437,19	831,63
3	0,37	254,34	0,38	254,34	0,38	254,34	0,38	254,34	0,38	254,34	0,41	254,35
4	0,04	54,20	0,07	54,21	0,07	54,21	0,07	54,21	0,07	54,21	0,08	54,22

Значения меридиональных и окружных напряжений, даH/см²

Анализ результатов таблицы показывает, что численные значения напряжений при значительных смещениях как жесткого целого v_n^l остаются практически неизменными.

Расчеты при использовании скалярной аппроксимации компонент вектора перемещения и компонент тензора напряжения показали, что численные значения напряжений получались такими же, как в колонках 2, 3 таблицы только при наличии жестких опор на левом краю оболочки. Если оболочка получала даже весьма малое смещение v_{n}^{l} результаты расчета оказывались неприемлемыми.

Таким образом, предложенная аппроксимация векторных и тензорных полей искомых величин внутренней точки конечного элемента позволяет учет смещения элемента как жесткого целого.

Конечный элемент на основе разработанного способа аппроксимации векторов перемещений и тензоров напряжений может найти применение в программных комплексах для расчета прочности оболочек произвольной толщины в трехмерной постановке.

Список литературы

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 391 с. 2. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

3. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

4. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига.: Зинанте, 1988. – 284 с.

5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – т.1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Гилёв А.В., д.т.н., профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение ВПО «Сибирский федеральный университет» (Минобразования РФ), г. Красноярск;

Богданов Е.П., д.т.н., доцент, профессор кафедры «Информационные системы в экономике» Волгоградского института кооперации (Филиал Российского университета кооперации), г. Волгоград;

Важенин А.Н., д.т.н., профессор ФГОУ ВПО «Нижегородская ГСХА», г. Нижний Новгород;

Арютов Б.А., д.т.н., зав. кафедрой прикладной механики, профессор ФГОУ ВПО «Нижегородская ГСХА», г. Нижний Новгород;

Беликов Г.И., д.т.н., доцент, профессор кафедры «Сопротивление материалов» ФООГУ Волгоградского архитектурного университета (Министерства образования и науки), г. Волгоград.

Работа поступила в редакцию 01.03.2011.