УДК 519.853+001.57

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОЭТАПНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Потетюнко Э.Н., Золотарев А.А., Корнюхин А.П., Золотарева Е.А.

ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет», Ростов-на-Дону,
e-mail: zolotarevaa@pochtamt.ru

Рассматривается условная векторная оптимизация многоэтапного планирования процессной задачи выпуска продукции. Развивается эффективный подход математического моделирования динамических процессов переработки сырьевых ресурсов на основе дискретизации, по времени соответствующей непрерывной модели. Предлагается методика сведения векторной проблемы к скалярной путем редукции вектора целей в интерпретации наилучшего компромисса между его отдельными скалярными составляющими критериями как минимума суммы их взвешенных относительных квадратичных отклонений от соответствующих однокритериальных оптимумов.

Ключевые слова: математическое моделирование, многокритериальная оптимизация, планирование процессов

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации поэтапного планирования производства продукции на основе процессной модели.

Обозначим через t – время, причем $t_0 \le t \le t_n$, где $t_j = t_0 + j\Delta t_j$ – верхняя граница j-го ($j = 1, 2, ..., n$) временного этапа производства, Δt_j – его продолжительность. В случае постоянного шага дискретизации процессов по времени $\Delta t_j \equiv \Delta t$ имеем $t_j = t_0 + j\Delta t$.

Введем $X(t)$ – искомый план-график производства, кусочно-непрерывную функцию, принимающую для j-го временного этапа постоянное значение $x_j = X(t_j) = \text{const}$.

Пусть $a(t)$ – динамический план-график выпуска продукции, обусловленный спросом или имеющимся портфелем заказов предприятия. Тогда между валовым объемом заказа и максимально возможным объемом производства S, обусловленным имеющимися мощностями, реализуется зависимость [1]

$$\int_{t_0}^{t_n} a(t)dt \approx \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} \equiv \sum_{j=1}^{n} a_j \le S; \qquad (1)$$

$$\mathbf{A} = \{a_j\}, \quad \mathbf{I} = \{1\}_{\overline{1,n}},$$

где a_j – некоторое осредненное на j-м этапе значение, задаваемое, для определенности, величиной $a_j = a(t_j)$.

Введем в рассмотрение удельную вектор-функцию $\{\theta_i(t)\}_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, каждая компонента которой отражает весовую значимость соответствующей составляющей вектора целей (связанной, например, с доходностью, издержками или уровнем экологичности и т.п.)

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{F_i(\mathbf{X})\} \quad (1 \le i \le m). \qquad (2)$$

Тогда осредненные за рассматриваемый период $T \equiv t_n - t_0 = n\cdot\Delta t$ интегральные взвешенные значения этапных компонент вектора целей (2) можно определить как [2]

$$\sigma_i = \left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_n}\theta_i(t)\cdot F_i(X(t))dt\right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\cdot F_i(x_j)\right)^{1/2};$$

$$\theta_{ij} = \theta_i(t_j), \quad F_{ij} = F_i(x_j) = F_i(X(t_j)).$$

С учётом введенной выше формализации, математическая постановка задачи многокритериальной условной оптимизации, рассматриваемая без сужения общности как минимизация осредненного вектора целей $\{\Phi_i\} = n \cdot \{\sigma_i^2\}$ [3], принимает вид:

$$\Phi_i(\mathbf{X}) \equiv \boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \cdot F_i(x_j) \to \min_{\mathbf{X} \in G}; \quad i = \overline{1,m}; \tag{3}$$

$$G = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \quad \left| \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j \preceq S, \quad \mathbf{0} \le \mathbf{Lo} \le \mathbf{X} \le \mathbf{Hi} \right. \right\}; \quad \mathbf{0} = \{0\}_{\overline{1,n}}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\theta}_i$ – вектор-строка матрицы весов $\{\theta_{ij}\}$, $\mathbf{X}$ – вектор переменных модели с интервальными ресурсными ограничениями $\mathbf{Lo} < \mathbf{Hi}$, причем

$$\{\boldsymbol{\theta}_i\} = \{\theta_{ij}\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}, \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{X}) = \{F_i(x_j)\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}, \quad \mathbf{X} = \{x_j\} \in G; \tag{5}$$

$$\mathbf{Hi} = \{h_j\}, \quad \mathbf{Lo} = \{l_j\}; \quad j = \overline{1,n}.$$

Для области допустимых решений G первое ограничение в (4) определяет отношение порядка $\preceq \in \{=, <, >, \le, \ge\}$, обусловливающее взаимосвязь между валовым планом выпуска продукции и максимальным объемом производства S.

Пусть условия ограничений (4) совместны, а каждая i-я скалярная задача (3), (4) разрешима и ее оптимум реализуется в точке $\mathbf{X}_i = \xi_i \in G$, где в общем случае $\xi_i \ne \xi_k$, $i \ne k$:

$$\min_{\mathbf{X} \in G} \Phi_i(\mathbf{X}) = \Phi_i(\xi_i) = \Phi_i^*, \quad i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

На основе принципа синтеза критериев сведем исходную задачу (3), (4) к однокритериальной условной оптимизации.

Для этого в произвольной точке области допустимых решений $\mathbf{X} \in G$ определим вектор невязок $\mathbf{r} = \{r_i(\mathbf{X})\}$, с компонентами r_i, отражающими неоптимальность реализации каждого скалярного критерия (3) в этой точке, как

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) \equiv \{r_i(\mathbf{X})\}_{i=\overline{1,m}} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\Phi}^*, \quad r_i = \Phi_i(\mathbf{X}) - \Phi_i^*. \tag{7}$$

В этом случае общая задача (3), (4) с вектором целей в интерпретации наилучшего компромисса между его отдельными скалярными составляющими критериями как минимума суммы их взвешенных относительных отклонений $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{X},\alpha) \equiv \{r_i(\mathbf{X}) / \Phi_i^*\}$ от своих локальных оптимумов Φ_i^*, $(i = \overline{1,m})$ с учетом вектора весов $\mathbf{C} = \{C_i\}$ может быть представлена как однокритериальная со скалярной функцией цели $R(\mathbf{X},\alpha)$ в виде:

$$\begin{gathered} R(\mathbf{X},\alpha) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Delta}^2(\mathbf{X},\alpha) \to \min; \\ \mathbf{X} \in G; \quad \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{Hi}, \mathbf{Lo}, \boldsymbol{\Theta}, m) \in \boldsymbol{\Lambda} \subset (\mathbb{R}^{n \times (m+3)} \times \mathbb{N}); \quad \mathbf{0} \le \mathbf{C} \le \mathbf{I}; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^2(\mathbf{X},\alpha) = \left\{ \left(1 - \frac{\Phi_i(\mathbf{X})}{\Phi_i^*} \right)^2 \right\}_{I=\overline{1,m}}; \quad \boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_i\} = \{\theta_{ij}\}_{I=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}; \quad \begin{cases} \mathbf{0} = \{0\}_{\overline{1,m}} \\ \mathbf{I} = \{1\}_{\overline{1,m}} \end{cases}.$$

Таким образом, исходная многокритериальная задача (3) с ограничениями (4), определяющими область допустимых решений G, при условии выполнения соотношения баланса (1) сведена к однокритериальной задаче условной параметрической (с вектором параметров α) оптимизации (8), (4). На основе алгоритмизации методов математического программирования разработанная модель реализована в рамках подсистемы ИС оптимального планирования бизнес-процессов с ориентацией на приложение в перерабатывающих отраслях.

Работа поддержана целевой комплексной программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Список литературы

1. Золотарев А.А. Оптимизация издержек конвейерного процесса литейного производства / А.А. Золотарев, Д.О. Дидковский // Системный анализ, управление и обработка информации: сборник научных статей. – Ростов-н/Д.: ДГТУ, Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2007. – С. 44–54.

2. Золотарев А.А. Оптимизация издержек конвейерного процесса / А.А. Золотарев, Д.О. Дидковский, Ю.Н. Макаров // Инновационные процессы пьезоэлектрического приборостроения и нанотехнологий: сборник трудов VI Международной научно-технической конф. (Анапа, 23–25 сент. 2008г.) – Ростов-н/Д/, 2008. – С. 269–279.

3. Золотарев А.А., Дидковский Д.О. Оптимальная параметризация в задачах распределения ресурсов // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т.9, Ч. 2. – С. 5–11.

4. Золотарев А.А. Векторная оптимизация распределительных процессов в региональных моделях переработки сырьевых ресурсов // Прикладная и промышленная математика: материалы XI Всерос. Симпозиума. Весенняя сессия (Кисловодск, 1 – 8 мая 2010 г.) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.tvp.ru/conferen/vsppm11/kidag316.pdf (дата обращения: 27.10.2010).

Рецензент –

Земляков В.Л., д.т.н., зам. декана факультета высоких технологий Южного федерального университета, зав. кафедрой информационных и измерительных систем ЮФУ, Ростов-на-Дону.

PARAMETRIC VECTOR OPTIMIZATION OF MULTISTAGE PLANNING

Potetyunko E.N., Zolotarev A.A., Kornyukhin A.P., Zolotareva E.A.

Southern Federal University, Rostov-on-Don,
e-mail: zolotarevaa@pochtamt.ru

In this paper we consider the conditional vector optimization of multi-stage process-planning problem of output. Developing an effective approach of mathematical modeling of dynamic processes, processing of raw materials, based on a sampling time corresponding to the continuous model. The technique of vector data to a scalar problem by reducing the vector goals in the interpretation of the best compromise between the individual scalar components of the criteria as the minimum sum of weighted relative deviation from the corresponding one-criterion optima.

Keywords: mathematical modeling, multicriteria optimization, process planning