УДК 519.2: 005.931.11

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РИСКА ПРИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИСХОДНЫХ СОБЫТИЙ И УЩЕРБА

Шевченко Е.Н.

ГОУ ВПО «Сургутский государственный университет ХМАО-Югры», Сургут, e-mail: elenan_27@mail.ru

Приводится оценка риска с использованием аппарата двумерных вероятностных распределений. Риск рассматривается как функция двух независимых случайных величин: вероятность исходных событий аварий и ущерб от них. Аналитически получены двумерные функции плотности распределения риска для различных сочетаний законов распределения случайных величин вероятности и ущерба. Рассмотрены законы распределения: Гаусса, Вейбулла, Стьюдента, Рэлея, экспоненциальное. Найдены значения функции плотности распределения риска с помощью численного интегрирования в пакете Maple. Исследована зависимость функции плотности распределения риска от параметров распределений вероятности и ущерба в диапазоне редких событий с большим ущербом. Полученные функции могут быть использованы для построения методики оценки риска технических систем.

Ключевые слова: риск, плотность распределения, функция случайных величин, вероятность исходных событий аварий, ущерб, оценка риска

MATHEMATICAL MODELLING OF RISK AS DISTRIBUTION FUNCTION OF TWO INDEPENDENT ACCIDENTAL VALUES OF PROBABILITY AND LOSSES

Shevchenko E.N.

Surgut State University, Surgut, e-mail: elenan_27@mail.ru

The study gives a risk assessment in technical systems. The risk is considered as two-dimensional distribution function of two stochastic variables: probability and losses. Expressions for density distribution of risk are given depending on various combinations of distributions of probabilities and losses. The study involves such distributions of variates probability and losses as Rayleigh, Gaussian, Weibull, Student, exponential. Numerical values are found for density distribution of risk with the aid of numerical integration. The study tested risk dependence on the values of probability and losses distribution parameters. The functions obtained can be used to construct a methodology of risk assessment in technical systems.

Keywords: risk, probability, losses, risk assessment, two-dimensional distribution function

Ухудшение экологической обстановки, заметное увеличение количества природных и антропогенных катаклизмов, а также четкое осознание ограниченности материально-технических и кадровых ресурсов для решения задач безопасности приводят к сознательным поискам научного, то есть оптимального подхода к обеспечению безопасности. Исследования техногенного риска как основного показателя безопасности систем не теряют своей актуальности. В рамках технократической концепции анализа риска производится оценка частоты возникновения исходных событий аварий и связанных с ними потенциальных потерь или ущербов. В зависимости от используемой исходной информации методики оценки риска могут быть следующих видов [1, 2]:

– инженерные статистические, когда вероятности определяются по имеющимся статистическим данным; построение статистических моделей риска требует наличия большого объема данных, полученных в результате наблюдений либо экспериментов, что не всегда осуществимо;

– инженерные теоретико-вероятностные, используемые для оценки рисков от редких событий, когда статистика практически отсутствует;

– модельный – построение моделей воздействия вредных факторов на человека и окружающую среду как при нормальной, так и при аварийной эксплуатации систем;

– экспертные (эвристические), основанные на использовании субъективных вероятностей, получаемых с помощью экспертного оценивания; используются при оценке комплексных рисков от совокупности опасностей, когда отсутствуют не только статистические данные, но и математические модели.

В математическом моделировании риска превалирующей моделью является модель многомерной (не меньше двух компонент) случайной величины.

В данной статье рассмотрены результаты моделирования риска как функции случайных величин вероятности исходных событий аварий Q и ущерба от них C.

Постановка задачи

Рассмотрим риск R, вероятность исходных событий аварий Q и ущерб C как случайные величины (СВ). Возможны два случая:

1) Q и C – независимые СВ;
2) Q и C – зависимые СВ.

Так как СВ Q и C могут иметь в каждом конкретном случае различные законы распределения, то необходимо исследовать влияние на значение риска различных видов законов распределения этих СВ и значений их параметров распределения.

Пусть имеется система двух непрерывных дифференцируемых случайных величин (Q, C) с плотностью распределения $f_{QC}(q, c)$. Случайная величина R связана с Q и C функциональной зависимостью

$$R = \varphi(Q, C). \quad (1)$$

Требуется найти закон распределения величины R.

Функция распределения величины R

$$F_R(r) = P(R < r) = P\,[\varphi(Q, C) < r]. \quad (2)$$

Для того, чтобы выполнялось неравенство $\varphi(Q, C) < r$, случайная точка (Q, C) должна попасть в область W, где значения функции $\varphi(Q, C)$ меньше текущего значения r, и, следовательно,

$$F_R(r) = P\big[(Q,C)\subset W\big] = \iint_W f_{QC}(q,c)dqdc. \quad (3)$$

В выражение (3) величина r входит неявно, через пределы интегрирования.

Дифференцируя $F_R(r)$ по r, получим плотность вероятности величины R:

$$f_R(r) = F_R'(r).$$

Если известен конкретный вид функции $\varphi = \varphi(q,c)$, можно выразить пределы интегрирования через функцию φ и написать выражение $f_R(r)$ в явном виде.

Так как принято считать, что СВ R есть произведение СВ Q и C, то очевидно, что уравнение кривой $\varphi = qc$ – это гипербола, асимптоты которой совпадают с осями координат. Область W при этом находится под графиком функции $\varphi = \varphi(q, c)$ (см. рис. 1):

$$W = \begin{cases} c > 0, \\ 0 \le q < 1. \end{cases}$$

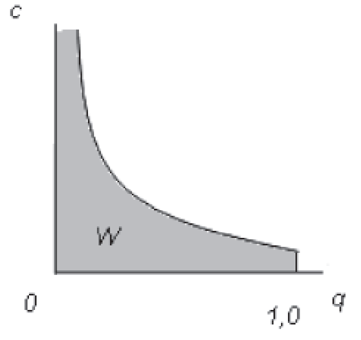


Рис. 1. Область интегрирования функции распределения риска

Тогда функция распределения СВ R имеет вид (4):

$$F_R(r) = \iint_W f_{QC}(q,c)dqdc =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{r/q} f_{QC}(q,c)dqdc, \quad (4)$$

а плотность вероятности $f_R(r)$ после дифференцирования выражения (4) по r равна

$$f_R(r) = \int_0^{\infty} \frac{1}{q} f\left(q, \frac{r}{q}\right) dq. \quad (5)$$

Недостатком выражения (5) является то, что в нем нет в явном виде функции φ, которая входит неявно через предел интегрирования r/q (4).

Таким образом, если будет известен вид законов распределения $f_Q(q)$ и $f_C(c)$, то можно определить вид и значение параметров функции распределения $F_R(r)$ и плотности $f_R(r)$.

Для случая независимых величин вероятности и ущерба рассмотрены сочетания законов распределения, приведенные в табл. 1.

Выбор законов распределения обусловлен практикой исследований в сфере безопасности технических систем [3, 5]. Распределения Гаусса (нормальное), логарифмически нормальное, Вейбулла, Рэлея описывают развитие отказов и дефектов в различных технических системах (например, различные элементы ядерных реакторов, коррозия металлов, наработка на отказ электронных элементов). Нетрадиционное для подобных задач распределение Стьюдента взято потому, что обладает тяжелыми хвостами, более соответствующими поведению «редких» аварийных событий.

Для этих сочетаний получены соответствующие функции плотности вероятности риска $f_R(r)$ по выражению (5). Они приведены в табл. 2.

Алгоритм и программное обеспечение численного эксперимента

Для численного моделирования использовался программный продукт Maple в силу удобства входного языка работы с функциями и наличием возможности аналитического решения отдельных математических задач, что является недоступным в аналогичных пакетах MathCad и MatLab.

При выборе параметров распределений мы руководствовались следующими соображениями. План эксперимента приведен в табл. 3.

Таблица 1

Рассмотренные сочетания законов распределения

Распределение вероятности	Распределение ущерба
Гаусса $m_q >> 3\sigma_q$ $$f(q) = \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-m_q)^2}{2\sigma_q^2}}$$	Гаусса $m_c >> 3\sigma_c$ $$f(c) = \frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-m_c)^2}{2\sigma_c^2}}$$
Рэлея $f(q) = \frac{q}{\sigma_q^2} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}}$	Рэлея $f(c) = \frac{c}{\sigma_c^2} e^{-\frac{c^2}{2\sigma_c^2}}$
Вейбулла $f(q) = \alpha_q \lambda_q q^{\alpha_q-1} e^{-\lambda_q q^{\alpha_q}}$	Вейбулла $f(c) = \alpha_c \lambda_c c^{\alpha_c-1} e^{-\lambda_c c^{\alpha_c}}$
Логнормальный q, $\sigma > 0$. $$f(q) = \frac{1}{q\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln q-m_q)^2}{2\sigma_q^2}}$$	Логнормальный c, $\sigma > 0$. $$f(c) = \frac{1}{c\sigma_c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln c-m_c)^2}{2\sigma_c^2}}$$
Стьюдента $$f(q,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_q}{2}\right)\sqrt{\pi n_q}} \left(1+\frac{q^2}{n_q}\right)^{-\frac{n_q+1}{2}}$$	Стьюдента $$f(c,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_c}{2}\right)\sqrt{\pi n_c}} \left(1+\frac{c^2}{n_c}\right)^{-\frac{n_c+1}{2}}$$

Таблица 2

Плотность распределения риска

Распределения вероятности и ущерба	Плотность распределения риска
Q-нормальный $m_q > 3\sigma_q$ C-нормальный $m_c > 3\sigma_c$	$$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_q\sigma_c}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-(q-m_q)^2/2\sigma_q^2 - (r/q-m_c)^2/2\sigma_c^2\right\} dq$$
Q-Рэлея C-Рэлея	$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_q^2\sigma_c^2}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-q^2/2\sigma_q^2 - r^2/2q^2\sigma_c^2\right\} dq.$$
Q-Вейбулла C-Вейбулла	$$f_R(r) = \alpha_q\lambda_q\alpha_c\lambda_c r^{\alpha_c-1}\int_0^1 q^{\alpha_q-\alpha_c-1}\exp\left\{-\lambda_q q^{\alpha_q} - \lambda_c\left(\frac{r}{q}\right)^{\alpha_c}\right\} dq.$$
Q-логнормальное C-логнормальное	$$f_R(r) = \frac{1}{2\pi r\sigma_q\sigma_c}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-\frac{(\ln q - m_q)^2}{2\sigma_q^2} - \frac{(\ln r/q - m_c)^2}{2\sigma_c^2}\right\} dq.$$
Q-Стьюдента C-Стьюдента	$$f_R(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_c+1}{2}\right)}{\pi\sqrt{n_q n_c}\,\Gamma\left(\frac{n_q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_c}{2}\right)}\int_0^1 \frac{1}{q}\left(1+\frac{q^2}{n_q}\right)^{-\frac{n_q+1}{2}}\left(1+\frac{r^2/q^2}{n_c}\right)^{-\frac{n_c+1}{2}} dq.$$

Для нормального и логнормального распределений математическое ожидание вероятности отказа принимает значения от 0,1 и ниже, т.к. события считаются редкими. Математическое ожидание ущерба рассматривается в относительном выражении, т.е. как отношение величины ущерба к стоимости системы. Величина среднеквадратического отклонения выбрана на основе экспертных оценок (см., например, [4]). Значение интенсивности отказов взято для редких событий равным 10^{-4} и менее. Для распределения Стьюдента количество степеней свободы взято из предположения о малости выборок, по которым оцениваются вероятность и ущерб. Малые выборки ($n_в \leq 300$) соответствуют количеству степеней свободы до 8 (например, по формуле $n = 3,3 \lg n_в$). Параметр α для распределения Вейбулла взят чисто теоретически в интервалах (0; 1), (1; 2) и (2; +∞) для изучения влияния соответствующих семейств распределения Вейбулла на распределения риска.

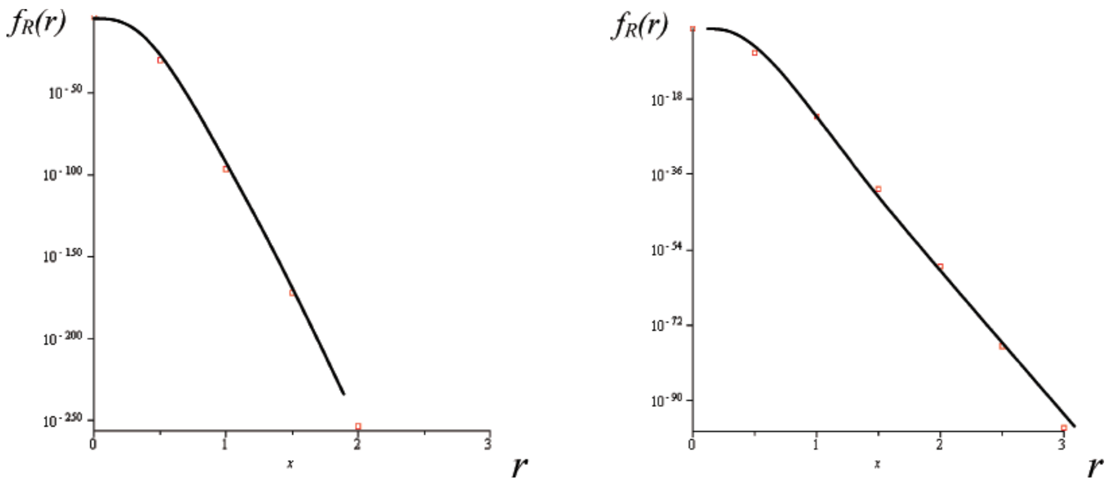
Таблица 3

Значения параметров законов распределения

Номер функции	Распределения		Значения параметров			
	Q	*C*				
1	Гаусса	Гаусса	$m_q = 0,1$	$\sigma_q = 0,01$	$m_c = 1$	$\sigma_c = 0,2$
2	Гаусса	Гаусса	$m_q = 0,1$	$\sigma_q = 0,03$	$m_c = 1$	$\sigma_c = 0,3$
3	Рэлея	Рэлея		$\sigma_q = 0,01$		$\sigma_c = 0,2$
4	Рэлея	Рэлея		$\sigma_q = 0,03$		$\sigma_c = 0,3$
5	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,1$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,1$	λ_c = 10^(-4)
6	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,2$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,2$	λ_c = 10^(-4)
7	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,1$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,2$	λ_c = 10^(-4)
8	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,1$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,5$	λ_c = 10^(-4)
9	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,2$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,1$	λ_c = 10^(-4)
10	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 0,5$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 0,1$	λ_c = 10^(-4)
11	Вейбулла	Вейбулла	$\alpha_q = 1,2$	λ_q = 10^(-4)	$\alpha_c = 1,2$	λ_c = 10^(-4)
12	Логнорм	Логнорм	$m_q = 0,1$	$\sigma_q = 0,01$	$m_c = 1$	$\sigma_c = 0,2$
13	Логнорм	Логнорм	$m_q = 0,1$	$\sigma_q = 0,03$	$m_c = 1$	$\sigma_c = 0,3$
14	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 4$		$N_c = 4$	
15	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 5$		$N_c = 5$	
16	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 6$		$N_c = 6$	
17	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 7$		$N_c = 7$	
18	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 8$		$N_c = 8$	
19	Стьюдента	Стьюдента	$N_q = 9$		$N_c = 9$	

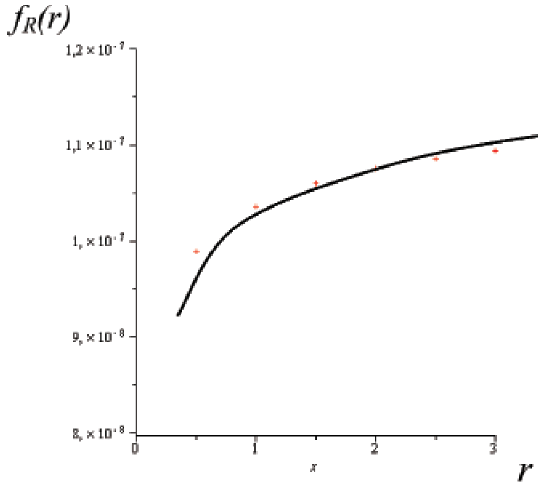
Результаты моделирования

Получены значения функции плотности вероятности риска $f_R(r)$ для различных сочетаний законов распределения вероятности исходных событий и ущербов от них и различных значений параметров этих законов. Значения функций табулированы, но здесь не приводятся из-за ограниченности формата статьи. Графики отображают поведение функций плотности риска.

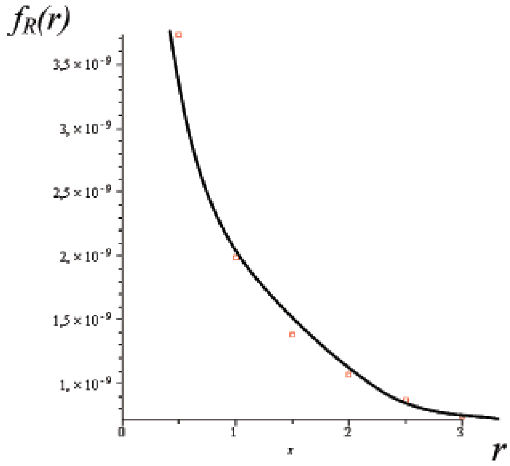


а б

Рис. 2. Вероятность и ущерб распределены по закону Гаусса с параметрами: а – $m_q = 0,1$; $\sigma_q = 0,01$; $m_c = 1$; $\sigma_c = 0,2$; б – $m_q = 0,1$; $\sigma_q = 0,03$; $m_c = 1$; $\sigma_c = 0,3$



а



б

Рис. 3. Вероятность и ущерб распределены по закону Вейбулла с параметрами: а – $\alpha_q = 1,2$; $\lambda_q = 10$^(-4); $\alpha_c = 1,2$; $\lambda_c = 10$^(-4); б – $\alpha_q = 0,2$; $\lambda_q = 10$^(-4); $\alpha_c = 0,1$; $\lambda_c = 10$^(-4)

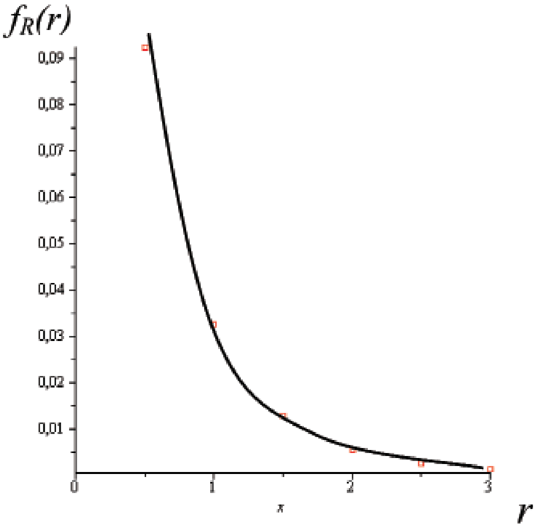


Рис. 4. Вероятность и ущерб подчиняются закону Стьюдента с параметрами $N_q = 4$; $N_c = 4$

Заключение

Таким образом, получены аналитические выражения для определения плотности распределения риска при независимых случайных величинах вероятности исходных событий и ущерба.

Полученные функции могут быть сравнены по положению экстремума $\max_r$ и по скорости стремления к нулю (приближения к асимптоте).

Рассмотрены законы распределения нормальный, Рэлея, Вейбулла, логарифмически нормальный, Стьюдента. Для семейства функций Вейбулла при значениях параметров α_q и α_c в диапазоне (0;1) при $\alpha_q \le \alpha_c$ и для логнормального закона с уменьшением σ функция плотности риска не может быть получена, т.к. интеграл (5) расходится. Для функций Гаусса и Рэлея наблюдается быстрое приближение функции плотности риска к нулю с ростом значения риска в незначительных пределах. Анализ рассмотренных законов распределения показал, что логарифмически нормальный закон, закон Вейбулла в определенном диапазоне и закон Стьюдента имеют тяжелые хвосты, больше соответствующие реальным данным о редких событиях аварий.

Список литературы

1. Акимов В.А. Надежность технических систем и техногенный риск / В.А. Акимов, В.Л. Лапин, В.М. Попов, В.А. Пучков, В.И. Томаков, М.И. Фалеев / под общ. ред. М.И. Фалеева. – М.: Деловой экспресс. – 2002. – 368 с.

2. Превентивный менеджмент чрезвычайных ситуаций / В.В. Глухов, В.Ю. Агапитов, К.А. Дубаренко – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 350 с.

3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

4. Острейковский В.А. Старение и прогнозирование ресурса оборудования атомных станций.– М.: Энергоатомиздат, 1994.– 288 с.

5. Острейковский В.А. Математическое моделирование техногенного риска / В.А. Острейковский, А.О. Генюш, Е.Н. Шевченко; Сургут. гос. ун-т ХМАО-Югры. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2010. – 83 с.

Рецензенты:

Антонов А.В., д.т.н., профессор, декан факультета кибернетики, профессор кафедры АСУ Обнинского института атомной энергетики научно-исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки РФ, г. Обнинск;

Григорьев Л.И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой автоматизированных систем управления Российского государственного университета имени И.М. Губкина Министерства образования и науки РФ, г. Москва.

Работа поступила в редакцию 19.09.2011.