УДК 511.331.1

# ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ РЯДА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

## Мазуркин П.М.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: kaf po@mail.ru

Мы придерживаемся концепции Декарта о необходимости применения алгебраических уравнений напрямую как конечных решений. Понятие вейвлет-сигнала позволяет абстрагироваться от не известной по ряду простых чисел физической величины. Любой ряд простых чисел можно разложить на конечномерное множество асимметричных вейвлетов с переменными амплитудой и частотой. Для примера взят ряд A000040. Первый член общей модели ряда A000040 по закону экспоненциального роста имеет вклад абсолютной погрешности 97,53%. Остальные 35 вейвлетов в сумме дают всего 2,47%. Но их влияние на ряд простых чисел  $a(n) = \{2, 3, 5, ..., 271\}$  весьма значительное. Доказано, что любой тип конечномерного ряда простых чисел можно разложить на конечномерное множество асимметричных вейвлетов с переменными амплитудой и частотой колебательного возмущения.

Ключевые слова: простые числа, семейство вейвлетов, фрактальные уровни

# WAVELET ANALYSIS OF A NUMBER OF PRIME NUMBERS Mazurkin P.M.

Mari State Technical University, Yoshkar-Ola, e-mail: kaf po@mail.ru

We adhere to the concepts of Descartes, the need to apply algebraic equations directly as a final decision. The concept of wavelet signal allows to abstract from an unknown number of primes of a physical quantity. Any number of primes can be decomposed into a finite set of asymmetric wavelets with variable amplitude and frequency. For example, taken a number of A00040. The first term of the total number of model A000040 according to the law of exponential growth is the contribution of the absolute error 97,53%. The first member of the general model of a number of A000040 on the law of exponential growth is the contribution of the absolute error 97,53%. The remaining 35 wavelets amount to a total of 2,47%. But their influence on the number of primes  $a(n) = \{2, 3, 5, ..., 271\}$  very significant. It is proved that any type of finite-dimensional number of primes can be decomposed into a finite-dimensional set of asymmetric wavelets with variable amplitude and frequency of oscillatory perturbations

## Keywords: prime numbers, the family of wavelets, fractal levels

Нужно выявить устойчивый закон распределения простых чисел по аналогии с методологией, показанной нами на росте относительной атомной массы у 109 химических элементов, в зависимости от порядкового номера в периодической системе Д.И. Менделеева [1].

Для примера примем ряд простых чисел  $a(n) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$  при  $n = \{1, 2, 3, ...\}$  и  $1 \le n \le 58$  для массива A000040. В статье показан физико-математический подход к анализу.

Вейвлет (всплеск) — это математическая функция. Английское слово «wavelet» означает в переводе «маленькая волна». Вейвлеты — это семейство функций, «волны, идущие друг за другом». По [2] термин «вейвлет» обозначает некую солитоноподобную функцию.

Осью абсцисс может быть не только время, но и любая другая величина. Вейвлет имеет четкую амплитудно-частотную характеристику в простых числах по порядку (условному времени). Если  $n = \{1, 2, 3, ...\}$  – абсцисса, то на оси ординат появится доля  $a(n) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$ .

В [3] графики, похожие на вейвлет, названы гладкой осциллирующей функцией. Поэтому гладкая функция типа a(n) = f(n) потребует непрерывного вейвлет-преобразования в действительных числах. Известно,

что вейвлеты при непрерывности анализа подчиняются принципу неопредёленности Гейзенберга и соответственно базис вейвлета также исходно не определен относительно участков оси абсцисс. Эти участки появятся в процессе идентификации.

Свойства вейвлета. Основные отличительные признаки вейвлета следующие:

- 1) амплитудно-частотная локализация по осям прямоугольных координат (x, y);
- 2) самоподобие (фрактальность) вейвлета как количественного отображения процесса;
- 3) снятие принципа неопределенности по последовательности появления вейвлетов;
- 4) независимость вейвлет-функции от объекта математического анализа;
- 5) инвариантность вейвлета сдвигу начала координат по оси абсцисс;
- 6) интеграл от вейвлета, т.е. площадь графика, должен быть равен или близок к нулю.

По этим признакам вейвлет-анализ часто сравнивают с «математическим микроскопом», вскрывающим внутреннюю структуру неоднородных объектов, явлений и процессов.

**Асимметричный вейвлет.** Мы придерживаемся концепции Декарта о необходимости применения алгебраических уравнений напрямую как конечных решений без при-

менения самих первообразных (дифференциальных и/или интегральных уравнений).

Шести условиям полно удовлетворяет асимметричная вейвлет-функция вида

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i; \quad y_i = a_{1i} x^{a_{2i}} \exp(-a_{3i} x^{a_{4i}}) \cos\left(\frac{\pi x}{a_{5i} + a_{6i} x^{a_{7i}} \exp(-a_{8i} x^{a_{9i}}) - a_{10i}}\right), \tag{1}$$

где y — показатель (зависимый фактор); i — номер составляющей (1); m — количество составляющих; x — объясняющая переменная (влияющий фактор);  $a_1...a_{10}$  — параметры (1), принимающие числовые значения

в процессе структурно-параметрической идентификации модели (1).

В большинстве случаев [4, 5] для идентификации закономерностей применим вейвлет

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i; \quad y_i = a_{1i} x^{a_{2i}} \exp(-a_{3i} x^{a_{4i}}) \cos\left(\frac{\pi x}{(a_{5i} + a_{6i} x^{a_{7i}}) - a_{8i}}\right). \tag{1a}$$

Ряд простых чисел как череда сигналов. Физико-математический подход предполагает понимание ряда простых чисел как отражения какого-то составного процесса действительности.

Сигнал – это материальный носитель информации. А информация нами понимается как мера взаимодействия. Сигнал может генерироваться, но его приём не обязателен. Так, например, ряд простых чисел известен несколько тысяч лет, но суть его как множества сигналов до сих пор не раскрыта. Сигналом может быть любой физический процесс, но его свойства по ряду простых чисел пока непонятны. Получается, что изменение множества неизвестных сигналов давно известно через ряд простых чисел. Поэтому примем ряд простых чисел за фрактальное множество аналоговых сигналов, изменяющихся непрерывно в неком времени по порядку n.

Тогда любой член уравнения (1a) можем записать как гармоничный вейвлет вида

$$y = A_{0,5} \cos\left(\frac{\pi x}{p_{0,5} - a_8}\right);$$

$$A_{0,5} = a_1 x^{a_2} \exp(-a_3 x^{a_4});$$

$$p_{0,5} = a_5 + a_6 x^{a_7},$$
(2)

где  $A_{0,5}$  — амплитуда (половина) вейвлета (ось y);  $p_{,5}$  — полупериод колебания (ось x).

По формуле (2) с двумя фундаментальными постоянными e и  $\pi$  (иррациональные числа), образуется изнутри квантованный вейвлет-сигнал в пропорции 0,5 (вещественное число) или 1/2 (рациональное число), а шаг квантования 1/2 подходит под гипотезу Римана.

В дальнейшем запись 0,5 в индексах опускаем.

Понятие вейвлет-сигнала позволяет абстрагироваться от неизвестной по ряду простых чисел физической величины. Мы уверены в том, что, как и сигналы в биологии, выявленные закономерности простых чисел

как суммы вейвлетов — будет важным событием. Как и в живой клетке: сигнал — это событие, имеющее регуляторное значение для функционирования клетки. Есть аналогия с сигналами в ряду простых чисел, которые вначале нужно выявить как вейвлеты.

Таблица А000040. В табл. 1 приведены исходные данные для вейвлет-анализа. График А000040, или «лестница Гаусса-Римана» приведен в Интернет. Вычислительные эксперименты показали, что для n > 500 нужен суперкомпьютер петафлопного класса.

Таблица 1 Конечномерный ряд простых чисел A000040: n — порядок простого числа; a(n) — простое число

n	a(n)										
1	2	11	31	21	73	31	127	41	179	51	233
2	3	12	37	22	79	32	131	42	181	52	239
3	5	13	41	23	83	33	137	43	191	53	241
4	7	14	43	24	89	34	139	44	193	54	251
5	11	15	47	25	97	35	149	45	197	55	257
6	13	16	53	26	101	36	151	46	199	56	263
7	17	17	59	27	103	37	157	47	211	57	269
8	19	18	61	28	107	38	163	48	223	58	271
9	23	19	67	29	109	39	167	49	227		
10	29	20	71	30	113	40	173	50	229		

**Первые вейвлеты**. Тренд (рис. 1) через 90000 шагов вычислений в программной среде CurveExpert-1.38 получил закон экспоненциального роста по формуле

$$a(n) = 6,57251 \cdot 10^{-83} \exp(189,7135n^{0,0065804})(3)$$

Остаток при первом порядке простых чисел равен 0,38096. Но простые числа начинаются с n = 1, а ордината равна a(n) = 2. В ряде нулевые значения отсутствуют.

По остаткам от детерминированной модели (3) в виде закона экспоненциального роста был получен вейвлет вида (1a) в виде формулы (рис. 2)

$$a_2(n) = A_1 \cos(\pi n / p_1 + 1,41491),$$
 (4)

$$A_1 = 16,40912n^{-1,81310} \exp(+0,40441n^{0,63429});$$

$$p_1 = 92,03817 - 68,33022n^{0,050053}.$$

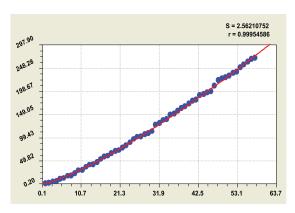


Рис. 1. График тренда (3) множества 4000040 простых чисел: S – дисперсия; r – коэффициент корреляции

График на рис. 2 похож на график дзета-функции Римана. Отличие состоит в том, что вместо комплексной области функция (4) расположена в положительном квадранте действительных чисел.

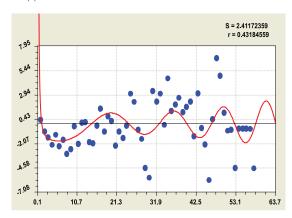


Рис. 2. График первой волны колебательного возмущения

Амплитуда формулы (4) изменяется по аномальному биотехническому закону, когда знаки у второго и третьего параметров биотехнического закона меняются.

В отличие от дзета-функции полупериод колебания в формуле (4) снижается, а не является постоянной, частота колебания нарастает по мере роста простого числа. При n=0 период колебания равен  $2\cdot92,03817\approx184$ . Это больше самого ряда  $1\leq n\leq58$ .

Вторая волна возмущения (рис. 3) получает функцию асимметричного вейвлета вида

$$a_3(n) = A_2 \cos(\pi n / p_2 - 1,33556),$$
 (5)  
 $A_2 = -0,00011633n^{4,01562} \exp(-0,49274n^{0,62216});$   
 $p_2 = 4,78606 - 0,00034507n^{1,88011}.$ 

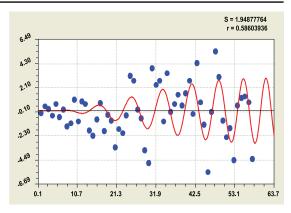


Рис. 3. График второй волны колебательного возмущения

Амплитуда получила отрицательный знак, т.е. возмущение ряда простых чисел здесь кризисное. В модели (4) есть сдвиг волны, который равен 1,41941 порядка вправо от n=0, а в (5) сдвиг равен 1,33556. Уединенная волна завершается после n=58, а левая граница левее от нулевого порядка.

Значимый интервал солитона начинается примерно с n = 8 или с a(n) = 19.

Объединение вейвлетов. Возможности CurveExpert (19 параметров) малы, поэтому удается «потрясти» совместно, для более плотной упаковки вейвлетов, только три составляющие (рис. 4) и получить общую модель вида

$$a(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n);$$
(7)
$$a_1(n) = 5,82517 \cdot 10^{-83} \exp(189,83601n^{0,0065753});$$

$$a_2(n) = A_1 \cos(\pi n / p_1 + 1,41453);$$

$$A_1 = 19,39898n^{-1,73234} \exp(+0,23129n^{0,76261});$$

$$p_1 = 93,75309 - 70,10898n^{0,048713};$$

$$a_3(n) = A_2 \cos(\pi n / p_2 - 1,44553);$$

$$A_2 = -0,00011171n^{4,00261} \exp(-0,49079n^{0,61786});$$

$$p_2 = 4,74039 - 0,00027372n^{1,92343}.$$

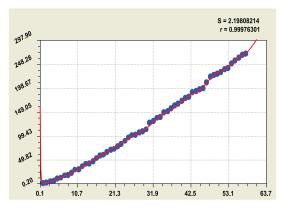


Рис. 4. График суммы трех вейвлетов роста простых чисел

Две волны дают рост коэффициента корреляции с 0,999546 у тренда (см. рис. 1) до 0,999763 у модели (7). Но такие малые приращения дают возможность разложения ряда простых чисел по вейвлетам a(n) = f(n).

**Компактная запись вейвлетов**. Параметры модели можно записать в матричной форме (табл. 2). Тренд есть уединенная волна с полупериодом, многократно превышающим интервал порядка простого числа.

 Таблица 2

 Параметры общего уравнения роста простых чисел множества A000040

Но-	Вейвлет										
мер	ампли	туда (полоі	вина) колебан	RNF	полу	фициент					
i	$a_{1i}$	$a_{2i}$	$a_{3i}$	$a_{_{4i}}$	$a_{5i}$	$a_{6i}$	$a_{7i}$	$a_{_{8i}}$	коррел- ляции <i>r</i>		
1	5,82517e-83	0	-189,83601	0,0065753	0	0	0	0	0,9998		
2	19,39898	-1,73234	-0,23129	0,76261	93,75309	-70,10898	0,048713	-1,41453			
3	-0,00011171	4,00261	0,49079	0,61786	4,74039	-0,00027372	1,92343	1,44553			
4	1,24610e-43	31,64837	0,060802	1,53064	16,36546	-0,19364	1,03795	-4,00668	0,499		
5	5,56081e-23	17,97705	0,0043979	2,23659	16,94340	-3,48197	0,36080	-4,50713	0,497		
6	0,021536	1,41090	0,00077267	1,97238	54,23757	-3,77334	0,53026	-1,91737	0,536		
7	1,04309e-86	50,52931	3,54300	1	16,80229	-0,70449	1	-1,82130	0,375		
8	1,70137e-15	14,37566	0,47611	1,00424	1,40716	0,033313	0,34232	2,31806	0,488		
9	-4,06038e-35	66,89465	7,47700	0,99717	4,45330	-0,20420	1,01131	-2,82198	0,318		
10	-2,02068e-12	14,10056	3,53171	0,52917	1,84833	-0,14689	0,32830	-3,55583	0,680		
11	8,92820e-80	54,00030	0,014702	1,84395	4,37877	-0,00081240	1,75655	-3,02207	0,332		
12	1,18070e-5	4,78940	0,19683	1	2,07024	-0,00027510	1,34578	-1,12678	0,293		
13	-3,38101e-8	5,76583	0,0012728	2,20188	2,18782	-0,43852	0,22272	-0,69168	0,8776		
14	-521,1866	4,37952	7,50836	0,38100	1,45463	-0,16507	0,091410	2,86731	0,477		
15	2,54885e-6	4,01934	0,088735	1	2,40526	0,016938	1	2,36226	0,423		
16	1,09156e-22	19,19700	0,61836	0,96619	6,08203	0,00035135	1,66701	-4,41882	0,365		
17	-0,0059078	1,18206	0,0085163	1,40727	2,41174	0,00019104	1,62562	2,35497	0,317		
18	-0,083202	0,18659	0,064990	0,45064	8,27728	-0,15579	0,99938	-2,96093	0,377		
19	-1,68978e-36	26,46217	0,16725	1,24814	1,83808	0,0011193	1,19831	0,092090	0,7794		
20	-2,36039e-13	16,30454	1,36566	0,91503	2,73707	-0,071939	0,92727	-2,97519	0,693		
21	2,93607e-10	10,25109	0,54899	1	11,61479	-0,25836	1	0,23163	0,407		
22	-1,89540e-6	8,85309	0,90538	0,99540	2,13247	-0,048777	0,99977	0,31235	0,518		
23	-6,94085e-18	13,23390	0,29628	0,99986	0,83762	0,0028770	0,99853	0,80734	0,579		
24	1,43427e-38	35,77440	0,79521	1,13034	1,84401	-0,013419	0,98188	-5,53047	0,539		
25	1,06010e-22	15,41216	0,13593	1,15576	3,16118	0,00027502	1,63773	4,84800	0,510		
26	-0,0036569	2,47324	0,31615	1	11,32210	-0,45103	1	-2,21077	0,355		
27	7,58224e-7	3,62252	0,083916	1,02103	6,43220	-0,016110	0,99970	-1,10336	0,157		
28	-1,52119e-5	2,09124	0	1	3,13542	-0,011853	0,99928	-0,85981	0,7050		
29	0,012398	1,01396	0,25956	0,75747	2,03834	-0,00052756	1,52643	1,56442	0,476		
30	4,34226e-5	2,04230	0,033661	1,00138	10,68980	0,021455	1,01024	0,47087	0,513		
31	-0,093145	3,23242	1,04851	0,99848	1,07959	-0,0013151	1,17492	4,12146	0,523		
32	1,93548e-13	14,59147	0,91161	1,00513	1,25837	0,0043789	1,05760	5,23704	0,429		
33	4,05962e-7	3,42328	0,054790	0,99867	3,32185	-0,0047885	1,04828	-3,09568	0,580		
34	-1,18100e-12	10,26508	0,42189	0,97466	1,18580	-0,00091799	1,33998	-0,93562	0,466		
35	-0,0010015	1,16087	0,062654	0,99977	46,92809	0,072304	0,61386	-0,53443	0,394		
36	-0,0049178	-0,43329	-0,035896	1,01859	8,80314	-0,020204	1,00481	-3,33438	0,401		

Нужна специальная программная среда, чтобы «потрясти» вместе всю сумму вейвлетов.

Фрактальные группы вейвлетов. Всего были идентифицированы 36 вейвлетов по семи группам составляющих общей модели. При этом аномальная волна по второй составляющей повторилась на 36-м члене множества. Группировка выполнена по скачкам снижения остатков по модулю, как

это показано в табл. 3. Графики групп вейвлетов приведены на рис. 5-8.

Вейвлет № 14 находится ближе к левой стороне ряда простых чисел, однако компьютер дал ту последовательность, которая последовательно идентифицируется программной средой CurveExpert. Череда сигналов от разложения ряда простых чисел не совпадает с номером вейвлета. Но эту череду надо уточнять только по-

сле проведения процедуры упаковки всех 36 составляющих общей модели типа (1a), а для этого нужен программный комплекс,

позволяющий одновременно учитывать десятки вейвлетов с несколькими сотнями параметров модели.

Таблица 3 Фрактальное снижение остатков (по модулю) после составляющих статистической модели (1а)

1 группа 2 группа		3 г	руппа	4 гј	уппа	5 гр	уппа	6 I	руппа	7 г	руппа			
$i \mid \varepsilon_{\text{max}} \mid$	i	$ \epsilon_{\text{max}} $	i	$ \epsilon_{ ext{max}} $	i	$ \epsilon_{\text{max}} $	i	$ \epsilon_{\text{max}} $	i	$ \epsilon_{\text{max}} $	i	$ \epsilon_{\text{max}} $		
0 271	4	4,591	10	1,764	16	0,473	22	0,167	28	0,059	34	0,021		
1 6,696	5	2,995	11	1,764	17	0,508	23	0,158	29	0,050	35	0,018		
2 5,592	6	2,365	12	1,522	18	0,503	24	0,148	30	0,050	36	0,017		
3 4,575	7	2,365	13	0,643	19	0,361	25	0,086	31	0,031				
	8	2,461	14	0,548	20	0,231	26	0,086	32	0,031				
	9	2,461	15	0,472	21	0,209	27	0,081	33	0,021				
			S = 1.67972771 r = 0.49908610				S = 1.4545 r = 0.4973	6038				S = 1,22477025 r = 0,53619912		
5.30 3.71 0.56 2.65 2.65 2.65 2.65 2.65 2.65 2.65 2	<sub>21,3</sub> (вле	31a 42.5 T № 4	53.1	390 233 056 248 248	223 065 290					259 244 079 089 0.1 10.7 21.3 31.9 42.5 53.1 63.7 Вейвлет № 6				
					S = 0.990839		S = 0,93945303							
188 056 051 052 051 187	31.9 42.5	285 189 085 081 188 188	055 051 052 1,65 2,65				251 1,65 0,31 2,95 0,1 10,7 2,1,3 31,3 42,5 53,1 63,7							
вей	івле	т № 7			вей	влет № 8	3			вейвлет	No 9			
252	31.9 42.5	0.85 0.85 0.80 0.80 0.80	0.55 0.29 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.5					42.5	S = 0.51528906 r = 0.29289966					
веи	влет	r № 10			вейвлет № 11					вейвлет № 12				
	21.3	319 42.5 No 13	S = 0.29782715 r = 0.87758744	0.76 0.55 0.78 0.78	10.7 21.3 Вейг	31.9 42. BJET № 1		056 044 056 072 071 071 071 073	10.7	21.3 31.9 Вейвлет	42.5 No 1.5	S = 0.23237560 r = 0.4226942		
Рис 5 Глафики вейвлетов втолой и третьей этипы (табл 3) распределения простых инсел 4000040														

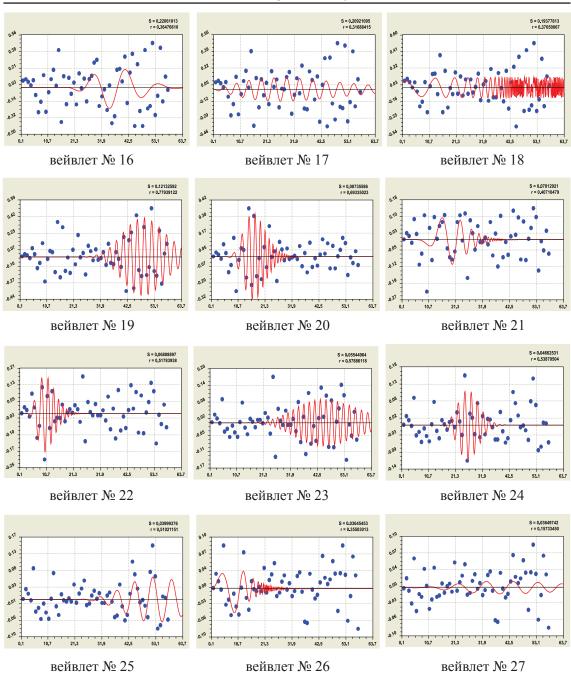


Рис. 6. Графики вейвлетов четвертой и пятой группы распределения простых чисел А000040

Анализ фрактальности суммы вейвлетов. Разные по форме сигналы самоподобны, т.е. фрактальны через общую модель типа (1а). Известно, что фракталы подобны через закон Мандельброта

 $y = a_1 \exp(-a_2 x)$ . Для фрактальной модели суммы вейвлетов показателем стала максимальная абсолютная погрешность (остаток)  $|\varepsilon_{\text{max}}|$ . По табл. 3 получили формулу

$$\left|\varepsilon_{\text{max}}\right| = 271 \exp(-6,95984i) + 2,66495 \cdot 10^9 i^{2,99207} \exp(-19,84166i^{0,15133} + 473460,03i^{2,18365} \exp(-13,64245i^{0,13941}) \cos\left(\frac{\pi i}{0,72506 + 0,056028i^{1,22448}} + 0,69650\right).$$
(8)

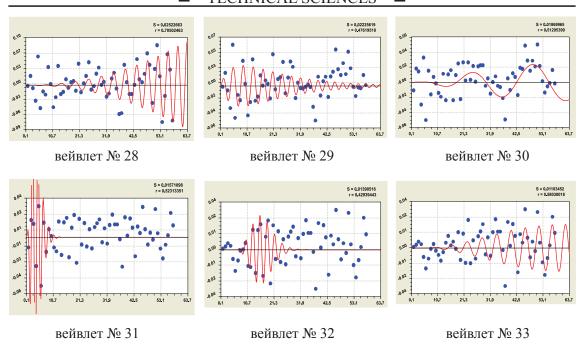


Рис. 7. Графики вейвлетов шестой группы распределения простых чисел А000040

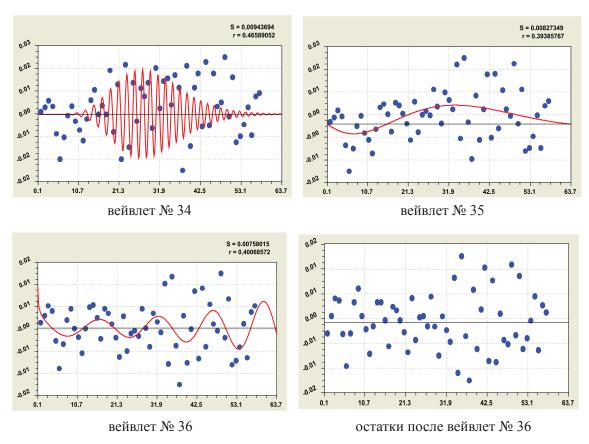


Рис. 8. Графики вейвлетов седьмой группы

Три члена формулы (7) дают вклад в снижение остатков

$$100(271 - 4.575)/271 = 98.32\%$$
.

Первый член по закону экспоненциального роста имеет вклад абсолютной погрешности

$$100(271 - 6,696)/271 = 97,53\%$$
.

Остальные 35 вейвлетов дают 2,47%. Но их влияние на ряд  $a(n) = \{2, 3, 5, ..., 271\}$  весьма значительное.

### Вывод

Любой тип ряда простых чисел можно разложить на конечномерное множество асимметричных вейвлетов с переменными амплитудой и частотой колебательного возмущения.

## Список литературы

1. Мазуркин П.М. Статистическая модель периодической системы химических элементов Д.И. Менделеева. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2006. – 152 с.

- 2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Том 166, № 11 (ноябрь). С. 1145—1170.
- 3. Дон Цагир. Первые 50 миллионов простых чисел. URL: http://www.ega-math.narod.ru/Liv/Zagier.htm.
- 4. Мазуркин П.М., Васильев А.А. Асимметричные сигналы электрокардиограммы // Охр. и защита, обустр., индикация и тестир. природной среды: сб. статей. М.: Академия Естествознания, 2010. С. 344–348.
- 5. Мазуркин П.М. Биотехнический закон и виды факторных связей // Успехи современного естествознания.  $2009.-N_{\rm 2}9.-C.152-156.$

### Репензенты:

Сафин Р.Р., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Архитектура и дизайн изделий из древесины» Казанского национального исследовательского технологического университета, г. Казань;

Царегородцев Е.И., д.э.н., профессор, зав. кафедрой экономической кибернетики Марийского государственного университета, г. Йошкар-Ола.

Работа поступила в редакцию 05.10.2011.