УДК 656.1+519.21

ГИБРИДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

[1]Тимофеева Г.А., [2]Ахмадинуров М.М.

[1]ФГОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, email: gtimofeeva@mail.ru;

[2]ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, email: madin@list.ru

В статье описана новая математическая модель движения автотранспорта, представляющая из себя гибридную систему. В рассмотренной модели динамика разгона и торможения автомобиля описывается дифференциальными уравнениями на основе модификации модели «умного водителя», а смена полосы – как дискретная составляющая. В основе математического описания смены полосы движения лежит авторская модель принятия решения при совершении обгона или объезда препятствия с учетом безопасности совершения маневра. Разработанная модель легла в основу имитационной программы моделирования движения автомобилей, которая позволяет определять оптимальный цикл светофора на перекрестке. В данной работе подробно описывается алгоритм получения уравнения движения автомобиля, при этом движение отдельного автомобиля рассматривается в неразрывной связи с его расположением относительно других автомобилей, так как изменение его координат зависит от расстояния до ближайших автомобилей для данной и соседних полос движения.

Ключевые слова: управление транспортными потоками, гибридные системы, имитационное моделирование, транспортная сеть, микромоделирование

THE HYBRID MATHEMATICAL MODEL OF TRAFFIC FLOW

[1]Timofeeva G.A., [2]Ahmadinurov M.M.

[1]The Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, email: gtimofeeva@mail.ru;

[2]The Ural Federal University, Ekaterinburg, email: madin@list.ru

The new mathematical model of vehicular movement is considered. The model is representing by a hybrid system. Movement of the vehicle is described by differential equations based on the modification of The Intelligent Driver Model (IDM), and a lane change is described as a discrete component. The basis of mathematical description of the change of lanes is the author's model. The mathematical model provides the basis for the program of a car traffic simulation, which allows to determine the optimal cycle of traffic lights at the intersection. This paper details the algorithm for obtaining the equations of motion of the car, with the motion of a single car interpreted in relation to its position relative to other cars, since the change of its components depends on the distance to nearby vehicles for this and the adjacent lanes.

Keywords: control of traffic flows, hybrid systems, imitating modeling, transport network, traffic flow, microscopic models

Стремительный рост автопарка негативно сказывается на пропускной способности дорожной сети городов. Один из способов решения транспортной проблемы заключается в оптимизации управления городскими транспортными потоками, в том числе за счет оптимального выбора режимов работы светофоров на перекрестках. Решить задачу оптимальной настройки светофоров возможно на основе создания имитационной модели транспортного потока. Этот подход требует меньших финансовых затрат, чем строительство новых и реконструкция существующих дорожных развязок.

Проблеме создания математической и имитационной модели транспортного потока и изучению свойств потока посвящено значительное число публикаций, и имитационные модели разрабатываются целыми исследовательскими коллективами. К основным подходам моделирования относятся макромоделирование (гидродинамические модели), микромоделирование, клеточные автоматы (обзор методов моделирования приведен в [1]). В каждом случае в зависимости от масштаба задач исследования выбирается степень детализации модели.

Гибридные модели последние десятилетия получили широкое применение в различных областях техники и естествознания [5], в том числе гибридные системы широко используются при моделировании движения автотранспорта [6]. В качестве дискретной составляющей рассматриваются переключение разрешающего сигнала светофора, изменение числа полос и др. В отличие от моделей других авторов в данной статье предлагается использовать упрощенную (дискретную) модель смены полосы в сочетании с непрерывной моделью движения автомобиля по полосе. В связи с этим рассматриваемая модель занимает промежуточное место между микромоделированием и моделями клеточных автоматов.

В данной статье подробно описаны принципы построения математической модели, которая легла в основу программы микромоделирования транспортных потоков.

Основной целью создания имитационной модели являлось нахождение оптимального цикла светофора. Однако полученная гибридная модель и имитационная программа могут применяться и для решения других задач управления транспортными потоками.

Авторы данной работы подошли к решению задачи моделирования транспортных потоков с изучения природы входящего потока автомобилей, а затем на основе полученных данных была разработана имитационная программа моделирования [3], которая позволяет находить оптимальный режим работы светофора [2].

Цель исследования заключается в создании математической модели транспортных потоков, которая в дальнейшем используется для построения имитационной модели движения автомобилей.

Для достижения цели исследования была разработана гибридная математическая модель движения автомобилей. Динамика разгона и торможения автомобиля в модели описывается дифференциальными уравнениями на основе модификации модели «умного водителя» (The Intelligent Driver Model) [4]. Смена полосы движения описывается дискретной системой, в основе которой лежит авторская модель принятия решения при совершении обгона или объезда препятствия с учетом безопасности совершения маневра.

Описание модели

В настоящей работе предлагается рассматривать гибридную модель движения отдельного автомобиля и дискретной составляющей служит переход на другую полосу движения.

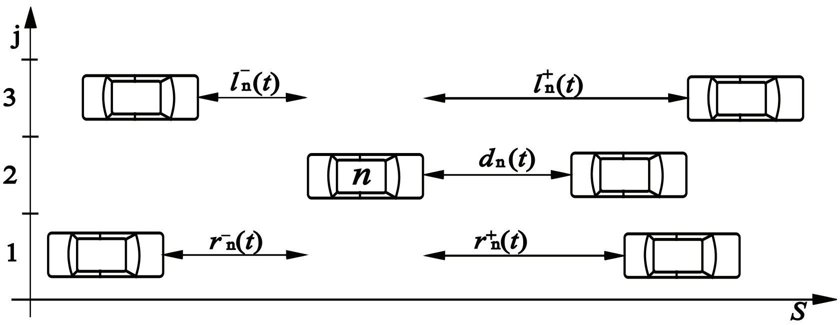
Рассмотрим движение отдельного автомобиля. Введем следующие обозначения:

n – индивидуальный номер автомобиля, $n = 1,\dots,N$;

j – номер полосы движения, $j = 1,\dots, J$;

$S_n(t)$ – расстояние от начала отчета (считается вдоль полосы) для n-го автомобиля в момент t.

Будем обозначать $j_n(t)$ номер полосы, по которой движется n-й автомобиль в момент t. В модели в каждый момент времени t положение автомобиля на дороге определяется двумя координатами: S и j. Расстояние $S(t)$ является непрерывной функцией, которая изменяется в соответствии с дифференциальными уравнениями движения. Номер полосы j принимает целые значения, и смена полосы происходит скачком, таким образом, движение автомобиля описывается гибридной системой. На рисунке изображен автомобиль n по отношению к другим автомобилям.



Положение автомобиля n по отношению к другим автомобилям

При описании динамики разгона и торможения и условий смены полосы будем использовать упрощенный вариант модели умного водителя [3].

Описание условий переключения режимов

Найдем уравнения для вычисления параметром модели движения для каждого автомобиля (см. рисунок).

1. Расстояние до впереди идущего автомобиля (по той же полосе):

$$d_n(t) = \min[(S_k(t) - S_n(t))|, k \ne n \;\; j_k(t) = j_n(t)]. \quad (1)$$

2. Расстояние до впереди идущего автомобиля по левой полосе $j_n(t) + 1$:

$$l_n^+(t) = \begin{cases} \min[(S_k(t) - S_n(t))|, k \ne n \;\; j_k(t) = j_n(t) + 1], \;\; j_n(t) \ne J \\ 0, \; j_n(t) = J \end{cases}. \quad (2)$$

3. Расстояние до позади идущего автомобиля по левой полосе $j_n(t) + 1$:

$$l_n^-(t) = \begin{cases} \min[(-S_k(t) + S_n(t))|, k \ne n \;\; j_k(t) = j_n(t) + 1], \; j_n(t) \ne J \\ 0, j_n(t) = J \end{cases}. \quad (3)$$

4. Расстояние до впереди идущего автомобиля по правой полосе $j_n(t) - 1$:

$$r_n^+(t) = \begin{cases} \min[(S_k(t) - S_n(t))|, k \neq n \;\; j_k(t) = j_n(t) - 1], \; j_n(t) \neq 1 \\ 0, \; j_n(t) = 1 \end{cases}. \tag{4}$$

5) Расстояние до позади идущего автомобиля по правой полосе $j_n(t) - 1$:

$$r_n^-(t) = \begin{cases} \min[(-S_k(t) + S_n(t))|, k \neq n \;\; j_k(t) = j_n(t) - 1], \; j_n(t) \neq 1 \\ 0, \; j_n(t) = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Каждая из перечисленных функций зависит от номера полосы движения автомобиля $j_n(t)$, расстояния от начала координат $S_n(t)$, момента времени t и номера автомобиля n.

Модель движения отдельного автомобиля состоит из 3-х компонент.

1. Модель ускорения автомобиля, в том числе движение без ускорения, как частный случай (условие I_1): расстояние до ближайшего впереди идущего транспортного средства не менее заданного значения S_0.

2. Условие перестроения автомобиля в левый ряд $j + 1$ при условиях, что расстояние до ближайшего впереди идущего транспортного средства меньше заданного значения S_0 (условие I_1 не выполнено), и перестроение в левый ряд возможно (условие I_2).

3. Условие перестроения автомобиля в правый $j - 1$ ряд при условиях, что расстояние до ближайшего впереди транспортного средства меньше заданного значения S_0 (условие I_1 не выполнено), и перестроение в левый ряд невозможно (условие I_2 не выполнено), но возможно перестроение в правый ряд (условие I_3 выполнено).

Торможение автомобиля задается с помощью обыкновенного дифференциального уравнения, производится при нарушении условий I_1, I_2, I_3.

Запишем условие движения автомобиля с ускорением a и обозначим индикатор выполнения этого условия через $I_1(d_n(t))$:

$$I_1(d_n(t)) = \begin{cases} 1, \text{ если } d_n(t) \geq S_0 \\ 0, \text{ если } d_n(t) < S_0 \end{cases}. \tag{6}$$

Аналогично сформулируем условия возможности перестроения автомобиля в левую (I_2)

$$I_2(l_n^-(t), l_n^+(t)) = \begin{cases} 1, \text{ если } l_n^-(t) \geq l_- \text{и } l_n^+(t) \geq l_+ \\ 0, \text{ если } l_n^-(t) < l_- \text{или } l_n^+(t) < l_+ \end{cases}, \tag{7}$$

и правую (I_3) полосы движения:

$$I_3(r_n^-(t), r_n^+(t)) = \begin{cases} 1, \text{ если } r_n^-(t) \geq r_- \text{и } r_n^+(t) \geq r_+ \\ 0, \text{ если } r_n^-(t) < r_- \text{или } r_n^+(t) < r_+ \end{cases}. \tag{8}$$

Таким образом, ускорение автомобиля происходит в случае, когда выполнено условие (6).

Запишем уравнение ускорения с условием (6):

$$\ddot{S}_n(t) = a_n \left[1 - \left(\frac{\dot{S}_n}{v_0} \right)^4 \right] \cdot I_1(d_n(t)), \tag{9}$$

где a_n – максимальное ускорение автомобиля n, м/с^2; $\dot{S}_n$ – текущая скорость автомобиля n, м/с; v_0 – максимально-допустимая скорость движения, м/с.

Запишем условия смены полос с учетом индикаторов выполнения условий. В момент $t + \delta$, $\delta > 0$, номер полосы j не меняется, если $I_1 = 1$; номер полосы увеличивается на единицу $j + 1$, если $I_1 = 0$ и $I_2 = 1$; и номер полосы уменьшается на единицу $j - 1$, если $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ и $I_3 = 1$.

В качестве решения гибридной системы будем рассматривать непрерывные слева, т.е. функции $j_n(t)$ для которых при всех t выполняется условие непрерывности слева

$$j_n(t - 0) = \lim_{\delta \to +0} j_n(t - \delta) = j_n(t). \tag{10}$$

В моменты смены полосы происходит скачкообразное изменение номера при увеличении номера полосы:

$$j_n(t + 0) = \lim_{\delta \to +0} j_n(t + \delta) = j_n(t) + 1, \tag{11}$$

и при уменьшении номера полосы:

$$j_n(t + 0) = \lim_{\delta \to +0} j_n(t + \delta) = j_n(t) - 1. \tag{12}$$

Таким образом, изменение переменной $j_n(t)$ описывается условием скачка:

$$\begin{aligned} j_n(t + 0) = j_n(t) + (1 - I_1(d_n(t))\, I_2(l_n^-(t), l_n^+(t)) - \\ -(1 - I_1(d_n(t)))(1 - I_2(l_n^-(t), l_n^+(t)))\, I_3(r_n^-(t), r_n^+(t)). \end{aligned} \tag{13}$$

В случае если $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$ происходит торможение и динамика описывается уравнением торможения, которое происходит только, в том случае если не выполняются условия I_1, I_2, I_3, т.е. соответствующие индикаторы равны 0:

$$\ddot{S}_n(t) = -a_n\left(\frac{s_0 + \dot{S}_n T}{S_n}\right)\cdot(1 - I_1(d_n(t)))\times$$
$$\times(1 - I_2(l_n^-(t), l_n^+(t)))\cdot(1 - I_3(r_n^-(t), r_n^+(t)), \tag{14}$$

где a_n – максимальное ускорение автомобиля n, м/с^2; – текущая скорость автомобиля n, м/с.

Получили, что изменение расстояния от начала координат описывается уравнением:

$$\ddot{S}_n(t) = a_n\left[1 - \left(\frac{\dot{S}_n}{v_0}\right)^4\right] I_1(d_n(t)) - a_n\left(\frac{s_0 + \dot{S}_n T}{S_n}\right)\times$$
$$\times(1 - I_1(d_n(t)))(1 - I_2(l_n^-(t), l_n^+(t)))(1 - I_3(r_n^-(t), r_n^+(t))). \tag{15}$$

А условие смены полосы – соотношениями (13). В эти уравнения входят функции $d_n(t)$, $l_n^-(t)$, $l_n^+(t)$, $r_n^-(t)$, $r_n^+(t)$, которые зависят от расположения остальных автомобилей на полосах движения (см. рисунок).

Выбор шага дискретизации в такой модели является отдельной задачей, так как непрерывная и дискретная составляющая движения преобразуются по-разному.

Таким образом, дифференциальное уравнение (15) и условие скачка (13) с учетом равенств (6)–(8) описывают движение, то есть изменение координат $\{S_n(t), j_n(t)\}$ n-го автомобиля с учетом расположения ближайших к нему машин. При этом функции $S_n(t)$ являются непрерывными и имеют непрерывную первую производную, функции $j_n(t)$ – кусочно-постоянными, непрерывными слева. Отметим, что в данной модели движение отдельного автомобиля рассматривается в неразрывной связи с его расположением относительно других автомобилей, так как изменение его координат зависит от значения функций $d_n(t)$, $l_n^-(t)$, $l_n^+(t)$, $r_n^-(t)$, $r_n^+(t)$, которые описывают расстояния до ближайших автомобилей для данной и соседних полос.

Заключение

Движение потока автомобилей, точнее той его части, которая находится на исследуемом участке дороги, описывается системой n дифференциальных уравнений 2-го порядка и n условиями смены полосы движения. Для решения такой гибридной системы предлагается метод мультиагентного моделирования.

Список литературы

1. Ахмадинуров М.М. Обзор методов моделирования транспортных систем // Транспорт Урала. – 2009. – № 3 (22). – С. 39–44.

2. Ахмадинуров М.М. Оптимизация светофорного регулирования с помощью программы моделирования транспортных потоков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 12, №22(198). – С. 26–30.

3. Ахмадинуров М.М., Тимофеева Г.А. Верификация программы микромоделирования потоков автотранспорта // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 2011, №1(24). – С. 7–12.

4. Kesting A., Treiber M., Helbing D. Agents for Traffic Simulation // Multi-Agent Systems: Simulation and Applications. – 2008.

5. Lygeros J. Lecture Notes on Hybrid Systems // Department of Electrical and Computer Engineering University of Patras, Greece. – 2004.

6. McCrea J., Moutari S. A hybrid macroscopic-based model for traffic flow in road networks // European Journal of Operational Research. – 2010. – Volume 207, Issue 2. – P. 676–684.

Рецензенты:

Сесекин А.Н., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург;

Берг Д.Б., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Института промышленной экологии Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург.

Работа поступила в редакцию 23.06.2011.