

УДК 519.711.3

## ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С УЧЕТОМ РИСКОВ

Семенчин Е.А., Шаталова А.Ю.

КубГУ, ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет»,  
Краснодар, e-mail: al-shatalova@yandex.ru

В статье обобщена математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков для произвольного числа месяцев инвестирования. Цель работы – при данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат разработать модель, минимизирующую сумму денег, которую банк должен затратить на инвестирование проектов. Приведены обобщенные формулы для вычисления индекса среднего риска, средней продолжительности инвестирования. Представлен пример инвестирования на период 6 месяцев.

**Ключевые слова:** планирование инвестиций, инвестиционный проект, индекс риска

## THE GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMUM PLANNING OF INVESTMENTS TAKING INTO ACCOUNT RISKS IN SMALL ENTERPRISES

Semenchin E.A., Shatalova A.U.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: al-shatalova@yandex.ru

The generalized mathematical model of investments taking into account risks in enterprises for fixed number of month is reviewed in this paper. Purpose of article to develop a model minimizes the amount of money that the bank must spend on investment projects. Mean index of risk and mean duration of investment are reviewed as generalized formulas. Instance of investment for 6 of month is reviewed.

**Keywords:** planning of investments, investment project, index of risk

В работе [4] рассмотрена задача планирования инвестиций с учетом рисков и методика ее решения средствами линейного программирования в случае, когда долговое обязательство заемщика (следовательно, и срок жизни инвестиционного проекта) составляет 6 месяцев. В [1] представлено решение этой задачи, полученное с помощью пакета MathCad. В данной статье эта задача обобщается на произвольное конечное число месяцев.

### 1. Постановка задачи

В кредитную организацию (банк) обратились для получения кредитов несколько организаций с различными инвестиционными проектами [1]. Через  $n$  месяцев банку необходимо получить за предоставляемые кредиты  $x$  долларов с учетом прибыли, при этом возвратность кредита через  $v$  месяцев должна составить  $y$  долларов.

Среди предложенных и потенциально реализуемых проектов банку необходимо выбрать наиболее прибыльные для него, при этом те проекты, которые обладают повышенными рисками, должны компенсироваться проектами с меньшими рисками, а длительные – должны выполняться одновременно с краткосрочными [1].

Потребуем, чтобы в течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов  $s_{cp}$  не превышал  $l$ , т.е.  $s_{cp} \leq l$ , и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных проектов не превышала  $r$  месяцев.

Цель работы – при данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат разработать модель, минимизирующую сумму денег, которую банк должен затратить на инвестирование проектов.

### 2. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков

Обозначим через  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_v, \dots, k_m$  – все возможные делители числа  $n$ ,  $k_m = n$ . Так как банку необходимо получить за предоставляемые кредиты  $x$  долларов через  $n$  месяцев, то под  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) будем понимать периоды инвестиционных вложений всех возможных инвестиционных проектов.

Пусть  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – инвестиционный проект с периодом инвестиционных вложений  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m - 2$ ) – заключительный момент инвестирования проекта  $A_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m - 2$ );  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – процент прибыли, выплачиваемый организацией банку согласно инвестиционного проекта  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – индекс риска при реализации  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Все возможные способы инвестирования проектов представлены в табл. 1.

Построим математическую модель, позволяющую минимизировать начальную сумму  $F$ , которую банк затрачивает на инвестирование проектов, при сохранении ожидаемой прибыли.

Возможные способы инвестирования проектов

Инвестиционные проекты	Периоды инвестиционных вложений	Моменты инвестирования	Процент прибыли	Индекс риска
$A_1$	1	1, 2, 3, ..., n	$\delta_1$	$s_1$
$A_2$	$k_2$	$\underbrace{1, 1+k_2, 1+2k_2, \dots, L_1}_{\frac{n}{k_2}}$ где $L_1 < n, n - L_1 < k_2$	$\delta_2$	$s_2$
$A_3$	$k_3$	$\underbrace{1, 1+k_3, 1+2k_3, \dots, L_2}_{\frac{n}{k_3}}$ где $L_2 < n, n - L_2 < k_3$	$\delta_3$	$s_3$
...	...	...	...	...
$A_v$	$k_v$	$\underbrace{1, 1+k_v, 1+2k_v, \dots, L_{v-1}}_{\frac{n}{k_v}}$ где $L_{v-1} < n, n - L_{v-1} < k_v$	$\delta_v$	$s_v$
...	...	...	...	...
$A_m$	n	1	$\delta_m$	$s_m$

Обозначим через  $X_\alpha(A_\beta)$  – объем вложений в момент  $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$  в инвестиционный проект  $A_\beta$  ( $\beta = 1, 2, \dots, m$ ). В соответствии с таблицей для каждого проекта  $A_\beta$  величина  $X_\alpha(A_\beta)$  будет изменяться в каждый момент  $\alpha$  следующим образом:

- при инвестировании в проект  $A_1$ :

$$\underbrace{X_1(A_1), X_2(A_1), X_3(A_1), \dots, X_v(A_1), \dots, X_n(A_1)}_n,$$

где  $n$  – число различных объемов инвестирования;

- при инвестировании в проект  $A_2$ :

$$\underbrace{X_1(A_2), X_{1+k_2}(A_2), X_{1+2k_2}(A_2), \dots, X_{1+(v-1)k_2}(A_2), \dots, X_{L_1}(A_2)}_{\frac{n}{k_2}},$$

где  $\frac{n}{k_2}$  – число различных объемов инвестирования;

- при инвестировании в проект  $A_3$ :

$$\underbrace{X_1(A_3), X_{1+k_3}(A_3), X_{1+2k_3}(A_3), \dots, X_{1+(v-1)k_3}(A_3), \dots, X_{L_2}(A_3)}_{\frac{n}{k_3}},$$

где  $\frac{n}{k_3}$  – число различных объемов инвестирования;

- при инвестировании в проект  $A_v$ :

$$\underbrace{X_1(A_v), X_{1+k_v}(A_v), X_{1+2k_v}(A_v), \dots, X_{1+(v-1)k_v}(A_v), \dots, X_{L_{v-1}}(A_v)}_{\frac{n}{k_v}},$$

где  $\frac{n}{k_v}$  – число различных объемов инвестирования;

- при инвестировании в проект  $A_m$ :

$$X_1(A_m);$$

(1)

здесь  $\frac{n}{k_m} = \frac{n}{n} = 1$ , т.е. число различных объемов инвестирования в проект  $A_m$  равно 1. Индекс  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, (m-2)$ ) – в (1) указывают на заключительные (последние) моменты инвестирования проектов.

Условие минимизации объема вложений банком в начальный момент в рассматриваемые проекты, согласно введенным обозначениям, будет иметь вид:

$$F = \sum_{i=1}^m X_1(A_i) \rightarrow \min. \quad (2)$$

$$\sum_{j:k_j:1} (1+0,01\delta_j)X_{1-k_j+1}(A_j) - \sum_{j:k_j:1} X_2(A_j) = 0$$

объемы вложений на конец первого месяца, т.е.

$$(1+0,01\delta_1)X_1(A_1) - X_2(A_1) = 0;$$

$$\sum_{j:k_j:2} (1+0,01\delta_j)X_{2-k_j+1}(A_j) - \sum_{j:k_j:2} X_3(A_j) = 0$$

объемы вложений на конец второго месяца;

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{j:k_j:v} (1+0,01\delta_j)X_{v-k_j+1}(A_j) - \sum_{j:k_j:v} X_{v+1}(A_j) = y$$

объемы вложений на конец  $v$ -го месяца;

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{j:k_j:n} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(A_j) = x - y$$

объемы вложений на конец  $n$ -го месяца;

где  $\sum_{j:k_j:v}$  – означает суммирование по тем  $j$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), для которых  $k_j$  является делителем  $v$ .

Последнее соотношение не содержит отрицательных слагаемых (вычитаемого), т.к. вложения, согласно постановке задачи, не будут осуществляться в  $(n+1)$ -м месяце.

Формула для вычисления индекса среднего риска для различных инвестиционных

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы вложений  $X_\alpha(A_\beta)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ;  $\beta = 1, 2, \dots, m$ ). Согласно постановке задачи (см. п. 1), банку для погашения других расходов необходима возвратность инвестируемых вложений объемом  $y$  долларов через  $v$  месяцев; в моменты  $1, 2, \dots, v-1, v+1, \dots, n-1, n$  месяцев дополнительные расходы не подразумеваются, а в  $n$ -ом месяце необходима возвратность инвестируемых вложений  $(x-y)$  долларов для реализованных инвестиционных проектов. Согласно этим требованиям будем иметь соотношение:

проектов  $A_1, A_2, \dots, A_m$  с индексами риска  $s_1, s_2, \dots, s_m$  имеет вид [4]:

$$R = \frac{A_1 s_1 + A_2 s_2 + \dots + A_m s_m}{A_1 + A_2 + \dots + A_m}. \quad (4)$$

Согласно этой формуле, для первого периода времени индекс среднего риска, не превышающий величины  $l$ , удовлетворяет неравенству:

$$\frac{X_1(A_1)s_1 + X_1(A_2)s_2 + \dots + X_1(A_m)s_m}{X_1(A_1) + X_1(A_2) + \dots + X_1(A_m)} \leq l,$$

для второго периода –

$$\frac{X_2(A_1)s_1 + X_2(A_2)s_2 + \dots + X_2(A_m)s_m}{X_2(A_1) + X_2(A_2) + \dots + X_2(A_m)} \leq l,$$

для периода  $v$  ( $v \neq 1$ ), –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(A_j)s_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(A_j)s_j + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(A_j)s_j}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(A_j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(A_j) + \sum_{j:k_j \geq v} X_1(A_j)} \leq l, \quad (5)$$

для периода  $n$  –

$$\frac{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(A_j)s_j + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(A_j)s_j + X_1(A_m)s_m}{\sum_{j:k_j < v \wedge k_j:(v-1)} X_v(A_j) + \sum_{j:k_j < v \wedge k_j \neq i:(v-1)} X_\psi(A_j) + X_1(A_m)} \leq l,$$



Очевидно, что:

$$\begin{aligned}
 & X_1(A_1) \geq 0, \quad X_2(A_1) \geq 0, \quad X_3(A_1) \geq 0, \quad \dots, \quad X_v(A_1) \geq 0, \quad \dots, \quad X_n(A_1) \geq 0; \\
 & X_1(A_2) \geq 0, \quad X_{1+k_2}(A_2) \geq 0, \quad X_{1+k_3}(A_2) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{1+v k_2}(A_2) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{L_1}(A_2) \geq 0; \\
 & X_1(A_3) \geq 0, \quad X_{1+k_3}(A_3) \geq 0, \quad X_{1+2k_3}(A_3) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{1+v k_3}(A_3) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{L_2}(A_3) \geq 0; \quad (10) \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & X_1(A_v) \geq 0, \quad X_{1+k_v}(A_v) \geq 0, \quad X_{1+2k_v}(A_v) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{1+v k_v}(A_v) \geq 0, \quad \dots, \quad X_{L_{v-1}}(A_v) \geq 0; \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad X_1(A_m) \geq 0;
 \end{aligned}$$

где индексы  $L_i$  ( $i = 1, \dots, (m - 2)$ ) – это заключительные моменты инвестирования проекта.

Соотношения (2), (3), (6), (9), (10) представляют собой математическую модель оптимального инвестирования предприятий с учетом рисков.

### 3. Пример

В кредитную организацию (банк) обратились для получения кредитов четыре организации с различными инвестиционными проектами [1]. Через 6 месяцев банку необходимо получить за кредит 750000 долларов с учетом прибыли, и для погашения других расходов банка, возвратность кредита через 2 месяца должна составить 150000 долларов.

Длительность представленных от организаций инвестиционных проектов составляет 1, 2, 3 и 6 месяцев. Процент за кредит каждой организации составляет соответственно 1,5; 3,5; 6; 11. Индексы рисков для каждого инвестиционного проекта организаций составляют соответственно 1, 4, 9, 7.

При данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат необходимо разработать модель, минимизирующую сумму денег, которую банк должен затратить на инвестирование проектов, учитывая, что в течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов не превышает 6, и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных проектов не превышает 2,5 месяцев [4].

Поставленная задача при указанных данных полностью совпадает с задачей, рассмотренной в [1]. Ее решение, полученное с помощью обобщенной модели (2), (3), (6), (9), (10) и Microsoft Office Excel, совпадает с решением, приведенным в [1]. На ос-

новании вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что описанный подход к решению поставленной задачи оказался успешным и перспективным.

### Заключение

В работе представлена обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков для произвольного числа месяцев инвестирования. Эта модель представляет собой задачу линейного программирования с целевой функцией (2) и ограничениями (3), (6), (9), (10).

В результате реализации поставленной цели были выведены формулы, предназначенные для решения задачи планирования инвестиций с учетом рисков для случая, когда долговое обязательство заемщика составляет произвольное число месяцев.

### Список литературы

1. Адамчук А.С., Амироков С.Р., Щепотьева С.В. Динамическая модель планирования инвестиций в форме задачи линейного программирования // Вестник СевКавГТУ, 2004. – №1.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
3. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. – М.: Вузский учебник, 2007. – 365 с.
4. Хачатрян С.Р., Пинешня М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

### Рецензенты:

Дударев Ю.И., д.т.н., профессор ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар;

Ургенов М.Х., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики ГОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар.

Работа поступила в редакцию 24.06.2011.