УДК 519.163

ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕРАБАТЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ СЫРЬЕВОГО ДЕФИЦИТА

Остроух Е.Н., Золотарева Л.И., Бычков А.А., Долгов В.В.

Южный федеральный университет (ЮФУ), Ростов-на-Дону,
e-mail: eostr@donpac.ru, www.fvt.rsu.ru

В работе предлагается математическая модель функционирования молочного комбината в форме задачи математического программирования: формулируется в зависимости от различных условий как задача линейного, так и нелинейного программирования, со скалярным или векторным критерием. Помимо этого выделены детерминированные и вероятностные параметры и методика определения их математического ожидания. Проведены расчеты решения поставленной задачи в различных постановках. Результаты расчетов дают возможность руководителям предприятий оперативно реагировать на изменение внешних условий: сезонность, погодные условия, спрос, изменяя номенклатуру и объем выпускаемой продукции в целях оптимизации производства.

Ключевые слова: технологии, производительность, прибыль, математическое программирование, векторный критерий

VECTOR OPTIMIZATION OF PROCESSING WORK WITH AN ALLOWANCE FOR SHORTAGE OF RESOURCES

Ostroukh E.N., Zolotareva L.I., Bychkov A.A. , Dolgov V.V.

South federal university, Rostov on Don, e-mail: eostr@donpac.ru, www. fvt.rsu.ru

In this work the authors suggested the mathematical model for effective management of a milk undertaking as a problem of mathematical programming. We have a task as a problem of mathematical programming: a problem of linear and nonlinear programming with scalar or vector criterion. The authors considered determinate and stochastic parameters and a methodology of determination their average of distribution. The authors researched accounts of our solution in different problems. Findings of calculation give a chance for manager promptly react on change of outward conditions: seasonality, weather conditions, demand. Manager changes product mix for optimization of business.

Keywords: technology, productivity, profit, mathematical programming, vector criterion

Исходя из маркетинговых исследований рынка, можно считать, что в рассматриваемом регионе или региональном окружении перерабатывающее предприятие сформировало некоторый портфель заказов на закупку сырья (при этом в одних случаях поставщики могут обеспечить предприятие сырьем на 100 %, в других случаях может иметь место дефицит сырья (в том числе и из-за фактора сезонности)). На часть готовой продукции имеются договорные обязательства с бизнес-партнерами, в том числе и госзаказ (больницы, школы, детские дома, войсковые части и т.д.), зависящий от сезонного фактора (осень, зима, лето, весна), и определена номенклатура молочных изделий, востребованных потребителями.

Введем обозначения для всего технологического комплекса молочного комбината через $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, обеспечивающего выпуск продукции k-й номенклатуры (кефир, сыр, йогурт и т.д.) на основании соответствующей технологии T_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Максимальная размерность вектора T составляет порядка 120–150 компонентов. Каждая технология T_k разбивается на технологические процессы или подтехнологии (этапы, составляющие), их количество порядка 20–30. Каждый такой процесс j характеризуется регламентированным технологией временем протекания t_{jk}, являющимся постоянной величиной (k-технология, j-процесс данной технологии); максимально возможной производительностью (загрузкой) оборудования R_{jk} (например, отношением времени работы оборудования к времени рабочей смены); финансово-экономическими издержками – затратами на j-м процессе технологии T_k-R_{ik}; экологическими издержками j-го процесса технологии T_k – величиной e_{jk} и т.д. Причем, эти величины могут быть детерминированными либо стохастическими величинами. Пусть V – максимально возможный объем молока, который может поставляться производителями на комбинат. В условиях ограниченности валового объема переработки V_1, обусловленной имеющимися мощностями комбината, и дефицита исходного сырья V, выражаемого ограничениями $V < V_1$ (а часто и при $V << V_1$), возникает оптимизационная задача оптимального выбора номенклатуры продукции и ее объемов выпуска, которые обеспечат максимальную прибыль комбинату, при выполнении гарантированных поставок продукции по госзаказу и по договорным обязательствам предприятия перед постоянными партнерами-потребителями. Разработка метода решения этой задачи и является целью нашего исследования.

Сформулируем математическую модель задачи. Пусть $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор объемов производимой продукции (x_k – объем выпуска продукции k-й номенклатуры) – искомая величина. Задан вектор $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ с компонентами v_k – удельными расходами молока, требующегося на изготовление единицы продукции k-й номенклатуры. Очевидно, что v_k – детерминированная величина.

Задан вектор удельного дохода $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ от реализации готовой продукции (d_k – соответствующая характеристика единицы продукции k-й номенклатуры).

Задан вектор $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – вектор издержек при изготовлении i-й продукции.

Величины D и Z можно считать стохастическими, зависящими от спроса, сезонности продаж, поставок сырья, оптовых скидок, затрат различного вида и т.д., т.е., в этой трактовке $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Z}$ – векторы математического ожидания дохода и издержек.

Можно задать вектор экологических затрат на единицу готовой продукции k, компоненты которого связаны с суммарными экологическими издержками j-го процесса e_{jk}. Обозначим вектор удельных экологических затрат $\mathbf{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (где e_k – соответствующая характеристика в расчете на единицу выпускаемой продукции k-й номенклатуры). Эти затраты можно в ряде случаев считать как детерминированными, так и стохастическими, т.е., E – математическое ожидание вектора экологических издержек.

Экологические издержки связаны с неполной переработкой сырья, выбросами отходов в канализацию и в воздух, что влечет за собой существенные штрафные санкции за загрязнение окружающей среды, а также установку (часто дорогостоящих) систем и оборудования для очистки.

Следует иметь в виду, что величины компонент искомого вектора $\mathbf{X}$ имеют ограничения снизу и сверху, т.е., $r_k \le x_k \le R_k$, где r_k – суммарные обязательные поставки готовой продукции по договорным обязательствам с постоянными партнерами и поставки по госзаказу;

$$R_k = \min\left(R_k^I, \Pi_k\right),$$

где R_k^I – производительность оборудования для изготовления изделия k, Π_k – максимально возможный объем продукции k, который в принципе можно реализовать (спрос на k-ю продукцию).

С учетом сказанного имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k x_k \to \max; \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k x_k \to \min; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} e_k x_k \to \min; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k x_k \le V; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} g_k x_k \le G; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \le M; \tag{6}$$

$$R_k \le x_k \le R_k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где v_k, g_k, m_k – удельные затраты (на единицу выпускаемой продукции) молока, электроэнергии и транспортные издержки соответственно, а G, M – соответствующие квоты.

Следует заметить, что ограничения (1), (2), (4) в определенных случаях могут иметь нелинейный вид (например, в (4) нелинейность может появиться в зависимости от каких-либо условий в процессах технологии T_k, например, температуры, давления и других физических и химических процессов):

$$\sum_{i \in I} v_i x_i + \sum_{j \in J} a_i f(x_j) \le V, \tag{8}$$

где I – множество индексов процессов с линейной зависимостью удельных расходов сырья, а J – с нелинейным характером зависимостей, причем $I \cup J \equiv \{1, 2, .., n\}$. Функция $f(x_k)$ определяется эмпирическим путем, исходя из статистических данных и их последующей обработки. Например, в некоторых случаях она аппроксимируется полиномиальной регрессионной зависимостью

$$f\left(x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k{}^2 + b_k x_k + c,$$

где коэффициенты a, b, c определяются на основе статистических оценок.

Итак, в достаточно общем случае имеем задачу (1)–(7) математического программирования с тремя критериями в виде (1)–(3), и ограничениями (4)–(7), учитывающими стохастические и нелинейные процессы. В последних случаях реализации следует заменить детерминированные величины d_k, z_k и e_k в (1)–(3) на значения их математических ожиданий, а условие (4) – на ограничение (8).

В первом приближении модели поставленная трехкритериальная задача линейного программирования (1)–(7) может быть сведена к однокритериальной в силу свойства аддитивности отражаемых экономических характеристик, т.е., в случае явной связи между критерием, описывающим максимизацию дохода, критерием, минимизирующим издержки комбината, и выделенным критерием, описывающим минимизацию экологических издержек (этот критерий следует учитывать, если суммарные экологические издержки сопоставимы с суммарными издержками на выпуск продукции); в противном случае при незначительной величине экологических издержек критерий (3) можно не рассматривать и задача превращается в двухкритериальную). В большинстве случаев рассматриваемые проблемы сводятся к постановкам задач линейного программирования, так как доход и издержки, как правило, линейно зависят от объема выпускаемой продукции. Это имеет место для комбинатов, средних по мощности, выпускающих стандартную продукцию. Для решения задачи (1)–(7) нами были использованы методы сведения к одному критерию [1] либо алгоритм решения двухкритериальной задачи, разработанный Е.Н. Остроухом и Л.Ч. Гамкрелидзе [2].

Следует заметить, что в случае функционирования больших предприятий (холдингов, объединений), выпускающих большой объем продукции, в том числе и нестандартной, как функция, описывающая доход D, так и функция, описывающая издержки Z, может иметь нелинейный вид, причем, доход описывается полиномиальной функцией второго порядка, а издержки – полиномиальной функцией третьего порядка, вследствие чего критерии (1) и (2) будут иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} d_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i + d_0 \to \max; \quad (1^*)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij}x_i^2 x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z'_{ij}x_i x_j + $$

$$+\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + z_0 \to \min. \quad (2^*)$$

Для нахождения коэффициентов $d_{ij}, d_i, z_{ij}, z_i, d_0, z_0$ в соотношениях (1^*) и (2^*) используется теория временных рядов. Создаются диаграммы зависимости данных от времени для отображения тренда, сезонных изменений и выбросов. Если данные изменяются со временем, то они преобразовываются для сохранения постоянства дисперсии, при этом для анализа экономических данных нами были использованы логарифмические преобразования с проверкой постоянства дисперсии для исходных и логарифмированных данных с течением времени. Отфильтруем регулярные составляющие временных рядов (убрав случайный шум), отметим, что они являются либо трендом, либо сезонной составляющей. Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени. Сезонная составляющая – периодически повторяющаяся компонента. В нашем случае имеем модели временного ряда, в которых амплитуда сезонных изменений увеличивается вместе с трендом, т.е., модели с мультипликативной сезонностью. Периодическую зависимость определяем как корреляционную зависимость порядка k между каждым i-м элементом ряда и $(i - k)$-м элементом. Ее можно измерить с помощью автокорреляции, т.е. корреляции между членами ряда. Сезонные составляющие временного ряда могут быть найдены с помощью коррелограммы.

Авторами был проведен ряд расчетов для решения задачи в постановке (1), (4)–(7) и (1), (4)–(6), (8) соответственно симплекс-методом и методами градиентного спуска и Бокса [3, 4]. Результаты расчетов дают возможность руководителям предприятия оперативно реагировать на изменение внешних условий, например, сезонности, погодных условий, спроса и других факторов, т.е., изменять и номенклатуру и объем выпускаемой продукции в целях оптимизации производства.

Для решения задачи в постановке (1^*), (2^*), (4)–(7) в случае перехода к одному критерию (весовые коэффициенты каждого из двух критериев выбираются на основании экспертных оценок) предложен генетический алгоритм, представляющий собой ядро, на основе которого можно строить алгоритмы для задач различного класса и различной размерности. Система работает со значениями типа double, позволяя задавать необходимую точность вычислений. Разработан собственный декодер, наследуемый от стандартного класса декодера. Алгоритм одинаково хорошо решает как задачи на максимизацию, так и на минимизацию. Благодаря указанию точности, можно настроить систему на работу с целыми числами. Система реализует довольно гибкую систему ограничений, которые могут быть как линейными, так и нелинейными. Система является объектной, следовательно, все параметры и критерии, требуемые для алгоритма, реализуются с помощью классов объектов. Структуры, требующие наибольшей гибкости, реализованы в виде интерфейсов. Это позволяет создавать собственные классы, наследуемые от этих структур. Используя данную возможность, можно гибко настраивать алгоритм для каждой конкретной задачи.

Использование предложенной модели в целом позволит решать ряд задач оптимизации работы холдингов и объединений, выпускающих как традиционную, так и инновационную продукцию, что поможет руководству оперативно и квалифицированно принимать оптимальные решения в плане стратегии предприятий и объединений в различных ситуациях.

Следует отметить, что в зависимости от особенностей задачи (нелинейные функции, стохастика) можно использовать, например, алгоритмы квадратичного, стохастического программирования [5], метод синтеза критериев [6, 7]. Решения задач указанных классов реализованы на основе разработанного пакета программных средств многокритериальной оптимизации.

Работа поддержана ЦКП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Список литературы

1. Подиновский В.В. Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.: Советское радио, 1975. – 192 с.

2. Остроух Е.Н., Гамкрелидзе Л.Ч. Метод решения дискретных задач многокритериальной оптимизации // Известия академии наук СССР. Техническая кибернетика. – М., 1989. – №3.

3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

4. Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Каныгин Г.И. Методы оптимизации. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.

5. Таха, Хэмди, А. Введение в исследование операций: пер. с англ. – 6-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

6. Золотарев А.А., Дидковский Д.О. Оптимальная параметризация в задачах распределения ресурсов // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т.9, Ч. 2. – С. 5–11.

7. Золотарев А.А., Дидковский Д.О. Оптимизация издержек конвейерного процесса литейного производства // Системный анализ, управление и обработка информации: сб. науч. статей – Ростов-на-Дону: ДГТУ, Таганрог: ТТИ ЮФУ. 2007. – С. 44–54.

Рецензенты:

Потетюнко Э.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Теория упругости» Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону;

Чистяков А.Д., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Экономика и менеджмент» Донского государственного технического университета, г. Ростов-на-Дону.

Работа поступила в редакцию 08.07.2011.