Наблюдающиеся здесь закономерности справедливы в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:
1. Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997.– 228 с.
2. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.
3. Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [arXiv.org/math.HO/0112050]

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ЧАСТНЫХ

Блюмин С.Л.
Липецкий государственный технический университет
Липецк, Россия

Исчисление конечных разностей [1] оперирует с конечными разностями числовой функции $y=f(x)$, $x,y\in\mathbf{R}$, и конечными разностями ее аргумента: $b-a$, $a,b\in\mathbf{R}$, $f(b)-f(a)$, $f(a),f(b)\in\mathbf{R}$. Связь исчисления конечных разностей с дифференциальным исчислением [2] опирается на теорему Лагранжа о конечных приращениях (о промежуточной точке, о среднем значении), выражающую конечную разность функции через конечную разность аргумента с использованием значения производной этой функции в некоторой точке c, промежуточной между точками a и b:

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a). \tag{1}$$

Наряду с конечными разностями $b-a$, $f(b)-f(a)$ как аддитивными мерами различия чисел a и b, $f(a)$ и $f(b)$, в математике и ее приложениях используются конечные частные b/a, $f(b)/f(a)$ – мультипликативные меры их различия.

Выражения конечных разностей/частных функции через конечные разности/частные аргумента, наряду с (1), могут быть получены из (1) путем логарифмирования/ экспоненцирования аргумента/функции:

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot c\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{2}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\left[\exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}\right)\right]^{(b-a)}, \tag{3}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{f'(c)\cdot c}{f(c)}}. \tag{4}$$

Исчисление конечных разностей и частных адекватно, среди прочих, современным задачам экономического факторного анализа [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:
1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 432 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – СПб.: Лань, 1997. – 608 с.
3. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарев С.В. Экономический факторный анализ. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧЕРЕЗ УДАРЫ С ВЫДЕЛЕННЫМ ОБЪЕКТОМ

Крупенин В.Л.
Институт машиноведения РАН
Москва, Россия

1. Рассмотрим семейство стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией энергии [1], обозначаемое далее $\mathbf{A}=\{\mathbf{A}_0;\mathbf{A}_1,..\mathbf{A}_N\}$. Каждой из систем $\mathbf{A}_r$ семейства $\mathbf{A}$ отвечает поле перемещений $u_r(x_r,t)\in\mathbf{R}^3$, причем вектора $x_r\in\mathbf{X}_r\subset R^3$ - суть векторные координаты точек систем $\mathbf{A}_r$; $t\in\mathbf{R}$; $r=0,1,..,N$.

Динамика всех членов семейства $\mathbf{A}$ определяется системами матричных операторов динамической податливости [1] $\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)$, где p - оператор дифференцирования. Указанные операторы имеют размерность [3x3] и ставят в соответствие силовым полям $\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r,t)$ $[\mathbf{x}_r\in\mathbf{X}_r]$ поля перемещений

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)=\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\,\mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t). \qquad (1)$$

Физический смысл каждой компоненты симметричной матрицы $\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)=||L^{(r)}_{kl}||$ (k,l=1,2,3) следующий.

Скалярный оператор $L^{(r)}_{kl}(y_r,x_r;p)$ ставит в соответствие *k*-й компоненте распределения силы $\mathbf{f}$ $(f_{kr}(y_r,t))$ *l*-ю компоненту перемещения $u_{lr}(x_r,t)$.

Каждый оператор $L^{(r)}$ является, вообще говоря, интегро-дифференциальным оператором и строится либо при посредстве исходной системы уравнений движения и необходимых дополнительных (например, граничных) условий, либо - на основании обработки экспериментальных данных [2]. Отметим, что присутствие нелинейных сил обращает представление (1) в нелинейное операторное уравнение.

Предположим теперь, что каждая из систем $\mathbf{A}_r$ (r=1,...,N) соударяется с системой $\mathbf{A}_0$ следующим образом.

Пусть при $\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_{r0}$ в каждой из систем $\mathbf{A}_r$ сосредоточено по одному включению, содержащему точечные тела с сосредоточенными массами m_{r0}, и в то же время система $\mathbf{A}_0$ содержит N подобных включений при $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_{0r}$, в которых сосредоточены точечные тела с массами m_{0r}; r=1,...,N. Пусть далее тела с массами m_{r0} могут соударятся с телами, обладающими массами m_{0r} соответственно, так что объединенная система (семейство) **A** содержит N сосредоточенных ударных пар. Введем относительные координаты

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{u}_0(x_{0r},t)-\mathbf{u}_r(x_{r0},t). \qquad (2)$$

и обозначим $\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]$ силу удара в r-й ударной паре, причем здесь и далее индексация по времени обозначает дифференцирование. Теперь можно записать систему из *(N+1)*-го операторного уравнения движения объединеннной виброударной системы **A** (ср.[1]):

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0,t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\{\mathbf{f}_0(y_0,t)-\Sigma\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\delta(\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_{0r})\}; \qquad (3)$$
$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)=L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\{\mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t)+\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\delta(\mathbf{y}_r-\mathbf{x}_{r0})\},$$

где $\delta(\mathbf{x})$ - δ-функция Дирака; суммирование ведется для r=1,...,N. При помощи (2) можно понизить размерность анализируемой системы. Проведя N вычитаний второго уравнения (3) из первого уравнения (3), получаем для относительных координат (2) при r=1,...,N

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\,\Sigma\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]-L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_r;p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)], \qquad (4)$$

где обозначено: $\mathbf{U}_{r0}(t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\mathbf{f}(y_0,t)-L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\mathbf{f}(\mathbf{y}_r,t)$ - изменение относительных координат (2) в отсутствии ударов и введены операторы

$$L_k(0,r)(p)=L(0)(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p);\ L_{0r}(p)=L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p)+L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_{r0};p).$$

Таким образом, соотношения (3) можно для удобства переписать и так:

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L_{0r}(p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]-L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\,\Sigma\Phi_k[\mathbf{u}_k(t),\mathbf{u}_{kt}(t)], \qquad (5)$$

причем суммирование осуществляется при $k\neq r$.

Выведенные соотношения - весьма общи, так как носят универсальный характер и описывают поведение представительного класса линейных между ударами систем. Если необходимые системы операторов динамической податливости и распределения внешних сил заданы, а гипотеза удара, определяющая функции Φ_k - конкретизирована, то, найдя из системы уравнений (4) представления относительных координат $\mathbf{u}_{r0}$, можно при помощи соотношений (3) найти перемещения любой точки семейства **A**.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00181 и 08-08-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. - Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. – 404 pp.

2. Широкополосные виброударные генераторы механическтх колебаний.// Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.

О ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Свирский М.С., Свирская Л.М.
Челябинский государственный педагогический университет
Челябинск, Россия

Как известно, основным уравнением нерелятивистской квантовой механики является уравнение Шредингера, которое в одномерном случае для стационарного состояния имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi .$$

На с. 21 из [1] Ферми показал, что уравнение Шредингера (1) получается из волнового уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{1}{V^2}\frac{d^2\psi}{dt^2}=0, \qquad (2)$$

где фазовая скорость

$$V=\frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}} . \qquad (3)$$

Однако, как известно, волновое уравнение (2) применимо только в случае однородной и изотропной среды, в которой фазовая скорость V является постоянной. Согласно (3) это возможно только в случае постоянной энергии E и постоянной потенциальной энергии U.

Отсюда следует, что для линейного гармонического осциллятора (ЛГО) с потенциальной энергией $U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$, которая не является постоянной, уравнение Шредингера (1) неприменимо. В случае ЛГО следует использовать обобщённое уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{i\hbar}{2m}\frac{dP_x}{dx}\psi+U\psi=E\psi, \qquad (4)$$

установленное нами в [2]. Уравнение (4) согласуется с постулатом Планка $E_n=n\hbar\omega$ и, следовательно (в отличие от обычного уравнения Шредингера (1)), с законами равновесного излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ферми Э. Квантовая механика/ М.: Мир, 1965, 367 с.
2. Свирский М.С., Свирская Л.М. Материалы VIII международной научно-практической конференции «Вузовское преподавание: проблемы и перспективы». – Челябинск, 2007.

Экологические технологии

ГОДОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА АММОНИЙНОГО В ВОДАХ РЕКИ СУСУИ

Чайко А.А.
Сахалинский государственный университет
Южно-Сахалинск, Россия

Известно, что основным источником загрязнения водотоков азотом является сельское хозяйство, которое в то же время является и главным потребителем воды. На долю его приходится около 70% затрат пресной воды [1].

При внесении в почву удобрений часть их, так или иначе, вымывается с поверхностным стоком. В целях борьбы с потерями удобрений, которые таким образом не используются выращиваемыми культурами, а сносятся в водотоки, и необходимостью компенсировать эти потери, в почву вносятся избыточные количества удобрений с таким расчётом, чтобы при вымывании их части со стоком, в земле сохранялась необходимая их концентрация. Это приводит к дополнительному загрязнению водотоков и водоёмов органическими веществами. Скажем, условно, что если из 1 тонны удобрений, необходимой для получения планируемого урожая выращиваемой сельскохозяйственной культуры 2/3 выносятся в водотоки с поверхностным стоком, а лишь 1/3 используется растениями, то на поле вносят 3 тонны удобрений. Таким образом, при вымыва-