УДК 512.54

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С САМОНОРМАЛИЗУЕМОЙ ПОДГРУППОЙ

Яковлева Е.Н.
Лесосибирский педагогический институт
г. Лесосибирск, Россия

В данной работе изучается строение разрешимых конечных подгрупп, содержащих фиксированный элемент простого нечетного порядка, в группах с самонормализуемой подгруппой. Изучается строение силовских 2-подгрупп в фактор-группе конечной разрешимой подгруппы по ее нильпотентному радикалу.

Частным случаем рассматриваемых в теореме групп являются бесконечные группы Фробениуса.

Исследования групп с заданными свойствами для системы подгрупп составляют одно из основных направлений в общей теории групп.

Группы с самонормализуемыми подгруппами изучались В.П.Шунковым, А.И.Созутовым [3].

Теорема. Пусть G – группа, H – ее подгруппа, обладающая конечной периодической частью, NG(H)=H, a – элемент простого порядка p≠2 из H и нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной подгруппы из H содержится в H. Тогда любая конечная разрешимая подгруппа K вида Tλ(a) из G, содержащая a и не принадлежащая H, имеет строение: $K = L(K)\,l\,(M \cdot ((b)\,l\,(f)))$, где L(K) – нильпотентный радикал группы K, M – силовская 2-подгруппа из K.

Для доказательства теоремы предварительно докажем ряд лемм. В конце работы приведены известные результаты, на которые имеются ссылки. Введем обозначения, которые не будут изменяться на протяжении всей работы: – нильпотентный радикал группы $\overline{K}$.

Пусть G – группа, H, K – ее подгруппы, a – элемент из H, удовлетворяющие условиям теоремы.

Лемма 1. Пересечение $L(K) \cap H$ тривиально.

Доказательство. Нильпотентный радикал L(K) группы K не содержится в подгруппе H, иначе получаем, ввиду того, что L(K) – (a)-инвариантная подгруппа из H, по условию теоремы K<H, а это противоречит тому, что подгруппа K не принадлежит H.

Предположим, что $D = L(K) \cap H \neq 1$. Очевидно, D – (a)-инвариантная подгруппа и по вышедоказанному $D \neq L(K)$. Так как L(K) – нильпотентная группа, то, ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах, каждая ее собственная подгруппа отлична от своего нормализатора. Тогда, так как по условию теоремы NL(K)(D)<H, получаем, что H пересекается с L(K) по подгруппе большей, чем группа D. Противоречие. Следовательно, $L(K) \cap H = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. Группа $L(K)\,l\,(a)$ является группой Фробениуса.

Доказательство. Предположим, что в L(K) существует неединичный элемент $k \in C_G(a)$. Тогда $k \in N_G((a))$ и по условию теоремы NG((a))<H. Отсюда k є H, что противоречит лемме 1. Значит, элемент a действует на L(K) регулярно. Лемма доказана.

Лемма 3. Если V – (a)-инвариантная q-подгруппа из K и в ней существует нетривиальный элемент t из CK(a), то q не делит порядок группы L(K).

Доказательство. Возьмем (a)-инвариантную q-подгруппу V из K. Предположим, что порядок L(K) делится на q. Обозначим, $Q = V \cdot U$, где U – силовская подгруппа из L(K). Группа U нормальна в

Q. Так как нормальная подгруппа нетривиально пересекается с центром, то $N = U \cap Z(Q) \neq 1$. Из того, что V и L(K) являются (a)-инвариантными подгруппами, легко увидеть, что N так же является (a)-инвариантной подгруппой.

По условию леммы в Q существует нетривиальный элемент t из CK(a) и так как N<Z(Q), то N<NK((t)). По условию теоремы CK(a)<H, следовательно, t є H и так как t – (a)-инвариантная подгруппа, то по условию теоремы NK((t))<H. Следовательно, N<H и так как N<L(K), то $L(K) \cap H \neq 1$. Получаем противоречие с леммой 1. Значит q не делит порядок L(K). Лемма доказана.

Лемма 4. Если в нильпотентном радикале L($\overline{K}$) группы $\overline{K}$ силовская 2-подгруппа $\overline{S}$ нетривиальна, то ее центр Z($\overline{S}$) циклический и порядок группы L(K) нечетен.

Доказательство. Пусть $\overline{S} \neq 1$ – силовская 2-подгруппа из L($\overline{K}$). Предположим, что порядок группы L(K) четен. Если $(\overline{a})$ действует регулярно на $\overline{S}$, то по лемме 2 (а) действует на полном прообразе S группы $\overline{S}$ тоже регулярно. Следовательно, по теореме Хигмана-Томпсона, S - нильпотентная группа. Так как $\overline{S}$ нормальная подгруппа в $\overline{K}$, то $S < K$. Таким образом, S – нильпотентная нормальная подгруппа в K, строго содержащая L(K). Получаем противоречие с тем, что L(K) – нильпотентный радикал группы K. Значит, $(\overline{a})$ централизует некоторый неединичный элемент в $\overline{S}$.

Вернемся к полным прообразам. В подгруппе S найдется инволюция i, которая централизует элемент a. Тогда i централизует нетривиальный элемент m из силовской 2-подгуппы в L(K) [1]. Так как $a \in C_K(i)$ и по условию теоремы нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной подгруппы из H содержится в H, то CK(i)<H. Так как $m \in C_K(i)$, то получаем, что $L(K) \cap H \neq 1$. Это противоречит лемме 1. Значит порядок L(K) нечетен.

Докажем, что центр $Z(\overline{S})$ силовской 2-подгруппы $\overline{S}$ из L($\overline{K}$) циклический. Предположим, что это не так. Обозначим через $\overline{R}$ нижний слой центра $Z(\overline{S})$. Он, очевидно, $(\overline{a})$-инвариантен. Если $(\overline{a})$ действует на $\overline{R}$ регулярно, то возвращаемся к полному прообразу R группы $\overline{R}$, он содержит L(K). Так как по лемме 2 (а) действует на L(K) регулярно, то по теореме Хигмана-Томпсона R – нильпотентная группа. Так как $\overline{R}$ – характеристическая подгруппа в нильпотентном радикале L($\overline{K}$) группы $\overline{K}$, то $\overline{R} > \overline{K}$. Тогда R является нильпотентной нормальной подгруппой из K, строго содержащей подгруппу L(K). Получаем противоречие с тем, что L(K) – нильпотентный радикал группы K. Следовательно, $(\overline{a})$ централизует нетривиальный элемент t в $\overline{R}$. Тогда по теореме Машке существует $(\overline{a})$-инвариантное дополнение $\overline{V}$ к группе (t)=T такое, что $\overline{R} = \overline{V} \times \overline{T}$.

Пусть подгруппа $\overline{V}$ – нециклическая. Рассуждая аналогично для группы $\overline{V}$ вместо $\overline{R}$, получим $\overline{V} = \overline{V}_1 \times \overline{T}_1$, где $\overline{T}_1$ – циклическая подгруппа из $C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Таким образом, $\overline{R} = \overline{V}_1 \times \overline{T}_1 \times \overline{T}$ и $\overline{T}_1 \times \overline{T} < C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Отсюда, так как выше доказано, что порядок L(K) нечетен, то переходя к прообразам найдется (a)–инвариантная элементарная абелева 2-подгруппа A из CK(a) и, значит, из H. Тогда по теореме Бернсайда некоторая инволюция из группы A, прообраза группы $\overline{T}_1 \times \overline{T}$ централизует нетривиальный элемент в L(K). Получаем $L(K) \cap H \neq 1$. Противоречие с леммой 1. Следовательно, $\overline{V}$ – циклическая группа.

Так как $\overline{V}$ – (a)-инвариантная группа порядка 2, то $\overline{V} < C_{\overline{K}}(\overline{a})$ и $\overline{V} \times \overline{T}$ – элементарная абелева 2-группа из $C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Рассуждая для этой подгруппы как и для подгруппы $\overline{T}_1 \times \overline{T}$ снова получаем противоречие. Следовательно, получаем, что нижний слой $\overline{R}$ циклический, а значит, и центр $Z(\overline{S})$ так же циклический. Лемма доказана.

Лемма 5. Если в нильпотентном радикале L($\overline{K}$) группы $\overline{K}$ силовская 2-подгруппа $\overline{S}$ нетривиальна, то все силовские q–подгруппы, $q \neq 2$, из $\overline{K}$ циклические.

Доказательство. Пусть Q – (a)-инвариантная q-подгруппа из K, где q нечетно. Порядок L(K) не делится на q по лемме 3. Рассмотрим группу $D = L(K)\, l\, Q\, l\, (a)$, где Q – q-подгруппа, (a)-инвариантный прообраз группы $\overline{Q}$. Так как (a) действует на L(K) регулярно и CD(L(K))<L(K), то по лемме Подуфалова $Q \times (a)$. Если Q – нециклическая группа, то в ней существует элементарная абелева q-подгруппа A порядка q2. Она централизуется элементом a. Тогда по теореме Бернсайда, неединичный элемент $k \in A$ централизует нетривиальный элемент в L(K). Так как A<CK(a) и CK(a)<H, $a \in C_K(a)$, то $L(K) \cap H \neq 1$. Противоречие с леммой 1. Значит, Q – циклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 6. Если в нильпотентном радикале L($\overline{K}$) силовская 2-подгруппа тривиальна, то все силовские q-подгруппы из L($\overline{K}$) циклические.

Доказательство. Пусть $\overline{Q}$ – силовская q-подгруппа из L($\overline{K}$) и $q \neq 2$, p. Тогда $C_{\overline{K}}(\overline{a}) \cap \overline{Q} \neq 1$. Действительно, если это не так, то $(\overline{a})$ действует на $\overline{Q}$ регулярно, тогда (a) действует регулярно на полном прообразе Q, так как a действует регулярно на L(K) и по лемме 3 порядок L(K) не делится на q. По теореме Томпсона Q – нильпотентная группа. Так как $\overline{Q} < \overline{K}$, то $Q < K$. Получили противоречие с тем, что L(K) – нильпотентный радикал группы K. Значит, $C_{\overline{K}}(\overline{a}) \cap \overline{Q} \neq 1$.

Теперь возьмем прообраз Q группы $\overline{Q}$ и рассмотрим группу $L(K)\, l\, Q\, l\, (a)$. Так как (a) действует на L(K) регулярно и порядок L(K) не делится на q, то по лемме Подуфалова $Q \times (a)$. Если Q – нециклическая, то, учитывая, что $q \neq 2$, в ней существует элементарная абелева q-подгруппа D порядка q2 [4]. Как доказано выше, элемент a централизует D. По теореме Бернсайда неединичный элемент $d \in D$ централизует нетривиальный элемент в L(K), но a поэлементно перестановочен с D. Следовательно, $L(K) \cap H \neq 1$. Противоречие с леммой 1. Значит Q – циклическая группа.

Рассмотрим случай, когда q=p. Возьмем прообраз Q группы $\overline{Q}$ и рассмотрим группу L(K)λQ. Если Q – нециклическая, то в ней найдется элементарная абелева p-подгруппа A порядка p2. По теореме Бернсайда неединичный элемент $k \in A$ централизует нетривиальный элемент в L(K). Так как A<CK(a) и CK(a)<H, $a \in C_K(a)$, то $L(K) \cap H \neq 1$. Противоречие с леммой 1. Значит, Q – циклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 7. Если в нильпотентном радикале L($\overline{K}$) силовская 2-подгруппа тривиальна, то все силовские q–подгруппы из $\overline{K}$ циклические и $(\overline{a}) \in L(\overline{K})$.

Доказательство. Пусть $\overline{Q}$ – силовская q-подгруппа из $\overline{K}$. Предположим, что $\overline{Q}$ – нециклическая. Пусть группа $(\overline{a})$ неперестановочна с силовской p'-подгруппой $\overline{S}_a$ из L($\overline{K}$). Рассмотрим группу $\overline{S}_a\, l\, (\overline{a})$. Она является группой

Фробениуса, так как $\bar{S}_a$ – циклическая группа. Возвращаясь к прообразам, получаем, что группа $S_a\,l\,(a)$ – группа Фробениуса, так как (a) действует регулярно на L(K), а порядок группы Sa взаимно прост с порядком группы L(K). Группа Sa нильпотентна и нормальна, что противоречит определению нильпотентного радикала L(K). Если в L($\bar{K}$) есть p-подгруппа P и она не циклическая, то в ней содержится элементарная абелева p-подгруппа порядка p2, содержащая элемент a. Применяя теорему Бернсайда получим, что $L(K)\cap H \neq 1$. Противоречие с леммой 1. Таким образом, $(\bar{a})$ перестановочна со всеми силовскими подгруппами из L($\bar{K}$), т.е. $(\bar{a})\in L(\bar{K})$.

Нетривиальный элемент $k\in \bar{Q}$ централизует $(\bar{a})$. Действительно, ввиду строения группы $K = T\,l\,(a)$, группу $\bar{Q}$ можно взять $(\bar{a})$-инвариантной по предложению 3. Если $\bar{Q}$ – 2'-группа, то ее прообраз – силовская примарная 2'-подгруппа Q нециклическая и в ней найдется элементарная абелева q-подгруппа A порядка p2, в которой по теореме Бернсайда найдется нетривиальный элемент, который централизует (a). Пусть $\bar{Q}$ – 2-группа. Из строения группы $\bar{a}\,l\,\bar{Q}$, если любой элемент из $\bar{Q}$ действует регулярно на $(\bar{a})$, то $\bar{Q}$ вкладывается в группу автоморфизмов циклической группы. Противоречие. Следовательно, по лемме 3, q не делит порядок L(K).

Теперь возьмем прообраз Q группы $\bar{Q}$ и рассмотрим группу $L(K)\,l\,Q\,l\,(a)$. Так как по лемме 2 (a) действует на L(K) регулярно и, учитывая строение группы K, на Q действует так же регулярно, то по лемме Подуфалова $Q\times(a)$. Если Q – нециклическая и так как $q\neq 2$, то в ней существует элементарная абелева q-подгруппа D порядка q2. Она централизует элемент a. По теореме Бернсайда $1\neq d\in D$ централизует нетривиальный элемент в L(K), но a перестановочно с D. Следовательно, $L(K)\cap H\neq 1$. Противоречие с леммой 1. Значит, Q – циклическая группа. Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

Пусть $\bar{S}$ – силовская 2-подгруппа из L($\bar{K}$), $\bar{M}$ – силовская 2-подгруппа из $\bar{K}$. Возможны три случая:

1) $\bar{M}\cap L(\bar{K}) = 1$, т.е. $\bar{S} = \bar{1}$;

2) $\bar{M}$ < L($\bar{K}$), т.е. $\bar{M} = \bar{S}$;

3) $\bar{M}$ не является подгруппой L($\bar{K}$), но $\bar{M}\cap L(\bar{K})\neq 1$.

Докажем теорему для случаев 1) – 3).

Пусть $\bar{S} = \bar{1}$. По лемме 7 силовские q-подгруппы из $\bar{K}$ циклические. По предложению 4 группа $\bar{K}$ – метациклическая. Переходя к прообразам, получим $K = L(K)\,l\,(b)\,l\,(f)$, причем, по лемме 8 $a\in(b)$.

Если силовская 2-подгруппа $\bar{M}$ из $\bar{K}$ содержится в L($\bar{K}$), т.е. совпадает с $\bar{S}$, то по лемме 5 все силовские q-подгруппы, $q\neq 2$, из $\bar{K}$ циклические. Так как фактор-группа $\bar{K}/\bar{S} - 2'$-группа, то она метациклическая. Теперь переходим к прообразам. В качестве прообраза группы $\bar{M}$ в группе K возьмем силовскую 2-подгруппу M. Получаем $K = L(K)\,l\,(M\cdot((b)\,l\,(f)))$, где $(b)\,l\,(f)$ – 2'-группа. По лемме 4 центр Z($\bar{M}$) силовской 2-подгруппы $\bar{M}$ из нильпотентного радикала L($\bar{K}$) циклический. Так как по лемме 4 порядок L(K) нечетен, то прообраз центра Z($\bar{M}$) в подгруппе M будет также центром в M и тоже будет циклическим.

Рассмотрим случай, когда подгруппа $\bar{S}\neq\bar{1}$, но M не является подгруппой L($\bar{K}$). Рассмотрим фактор-группу $\bar{K}/\bar{S}$. Нильпотентный радикал L($\bar{K}/\bar{S}$)

– циклическая группа нечетного порядка. Предположим, что это не так. Пусть в L($\overline{K}/\overline{S}$) есть 2-элементы, тогда в $\overline{K}$ есть силовская 2-подгруппа Q>$\overline{S}$. Тогда – нильпотентная нормальная подгруппа. Противоречие с максимальностью L($\overline{K}$). Цикличность силовских подгрупп из нильпотентного радикала L($\overline{K}/\overline{S}$) показывается так же как в лемме 8. Тогда нильпотентный радикал L($\overline{K}/\overline{S}$) разлагается в прямое произведение силовских подгрупп нечетного порядка и L($\overline{K}/\overline{S}$) циклическая группа. Так как L($\overline{K}/\overline{S}$) – нильпотентный радикал группы $\overline{K}/\overline{S}$, то $C_{\overline{K}/\overline{L}}\left(L\left(\overline{K}/\overline{S}\right)\right) < L\left(\overline{K}/\overline{S}\right)$. Фактор-группа $\overline{K}/\left(L\left(\overline{K}/\overline{S}\right)\right)$ вкладывается в подгруппу группы автоморфизмов группы L($\overline{K}/\overline{S}$). А так как группа автоморфизмов циклической группы сама циклическая, то и фактор-группа $\overline{K}/\left(L\left(\overline{K}/\overline{S}\right)\right)$ тоже циклическая. Переходя к прообразам, получаем $K = L(K)\,l\,(M \cdot ((b)\,l\,(f)))$. Теорема доказана.

Теорема Хигмана-Томпсона. Всякая конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом простого порядка p, нильпотентна и длина ее верхнего центрального ряда ограничена числом, зависящим только от p [6], [7].

Лемма Подуфалова. Пусть конечная группа $G = Q\,l\,(x)$, где Q – нормальная q-подгруппа, x – элемент порядка p, q и p – различные простые числа. Если группа G действует точно на неединичной конечной {p, q}'–группе так, что элемент x действует регулярно,то либо G – нильпотентная группа, либо q=2 [2].

Теорема Бернсайда. Пусть G – конечная группа вида $G = B\,l\,L$, где B – нетривиальная p-группа, L – элементарная абелева q-группа порядка q2 и p≠q. Тогда для некоторого элемента a порядка q пересечение $C_G(a) \cap B \neq 1$ [5].

Если силовские подгруппы конечной группы G порядка g все цикличны, то G – метациклическая группа, порожденная двумя элементами a и b с определяющими отношениями: am=bn=1, b-1ab=ar, mn=g, [(r-1), mn]=1, rn≡1(mod m). Обратно, группа, заданная этими определяющими отношениями, обладает только циклическими силовскими подгруппами [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1977.

2. Подуфалов Н.Д. Конечные простые группы без элементов порядков 6 и 10 // Алгебра и логика. – 1975. – Т.14, N1. – С. 79 – 85.

3. Созутов А.И. О существовании в группе f- локальных подгрупп // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36, N5. – С. 573 – 598.

4. Холл М. Теория групп. – М.: Иностр. Лит., 1962.

5. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980.

6. Higman G. Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed points. J. London Math. Soc. – 1957. – N32. – P. 321-334.

7. Thompson J.G. Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Amer. Sci. USA. – 1959. – N45. – P. 578-581.

About infinite groups with a self-normalized subgroup

Yakovleva E.N.
Lesosibirsk pedagogical institute
Lesosibirsk. Russia

The structure of solvable finite sub-groups containing fixed element of simple odd order in groups with self-standardized sub-group is studied in this paper. Also the paper deals with the structure of power 2-groups in a factor-group of finite solvable sub-group according to its nilpotent radical.

The particular case of considered groups in the theorem are infinite groups of Frobenius.