

УДК 530.1.076

РАБОТА СИЛ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО (СФЕРИЧЕСКОГО) ЗАРЯДА

Иванов Е.М.

Димитровградский институт технологии, управления и дизайна

Рассмотрена работа перемещения точечного заряда q в поле точечного (сферического) заряда Q . В случае зарядов одного знака заряд q под действием силы Кулона F_k будет удаляться от Q . Работа силы $A_0 = kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$, где $r_0 < r_1$. Для перемещения заряда в обратном направлении работа A сторонней силы F всегда больше A_0 . Только в случае действия мгновенной (импульсной) сторонней силы $A \rightarrow A_0$. Для перемещения заряда по дуге окружности (эквипотенциальной линии) необходима работа двух сторонних сил: удерживающей (численно равной силе Кулона) и перемещающей

Рассмотрим взаимодействие двух сферических зарядов Q и q , радиусы которых много меньше расстояния между ними r_0 (рис.1). заряд Q будем считать неподвижным. Сила взаимодействия между зарядами определяется законом Кулона: $F_k = kQq/r^2$, где $k = 1/4\pi\epsilon_0$. в случае одноименных зарядов q будет удаляться от Q . Уравнение движения будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_k \quad (1)$$

Если в точке r_0 начальная скорость $V_0 = 0$, то последовательно находим:

$$V = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2kQq}{m} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} \quad (2)$$

$$t = \frac{r_0 \sqrt{mr_0}}{\sqrt{2kQq}} \left[\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} \sqrt{\frac{r}{r_0}} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right] \quad (3)$$

Работа перемещения q от r_0 до r_1 может быть определена несколькими способами:

$$A_0 = \int_{r_0}^{r_1} F_k dr = kQq \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) = q(j_0 - j_1) \quad (4)$$

где $j = kQ/r$ - потенциал электрического поля. Это же выражение может быть получено на основе соотношения: $A_0 = K_1 - K_0 = \Pi_0 - \Pi_1$, где $K = mV^2/2$ - кинетическая энергия, $\Pi = qj$ - потенциальная энергия.

В работах [1-4] показано, что работу можно также вычислить, используя импульс силы I :

$$A_0 = I^2 / 2m, \quad \text{где } I = \int_0^{t_k} F_k dt \quad (5)$$

Величина dt определяется выражением (2), t_k - время перемещения от r_0 до r_1 . Интегрируя и вычисляя I^2 , получим то же самое выражение (4).

Чтобы переместить заряд q обратно из точки r_1 в r_0 , необходимо приложить стороннюю силу F , большую, чем кулоновская сила F_k , и направленную в противоположную сторону.

СЛУЧАЙ I. Сторонняя сила F больше кулоновской на постоянную величину ΔF : $F = F_1 - \Delta F$, где $F_1 = |F_k|$. Тогда уравнение движения запишется в виде:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_k - \Delta F - F_1 \quad (6)$$

Под действием силы ΔF заряд будет совершать равноускоренное движение: $S = r_1 - r = at^2 / 2 = \Delta Ft^2 / 2m$, $t^2 = 2m(r_1 - r) / \Delta F$.

Импульсы сил, действующих на тело:

$$I_k = \int F_k dt, \quad I_2 = \int \Delta F dt, \quad I_1 = \int F_1 dt$$

где $dt = -\sqrt{m} \cdot dr / \sqrt{2\Delta F(r_1 - r)}$. Суммарная работа, совершаемая всеми силами:

$$A_\Sigma = \frac{1}{2m} [-I_k + (I_2 + I_1)]^2 = A_- + A_+ \quad (7)$$

Работа, совершаемая кулоновской силой:

$$A_- = -(I_k^2 + 2I_k I_2) / 2m \quad (8)$$

Работа, совершаемая сторонней силой:

$$A_+ = (I_1^2 + 2I_1 I_2 + I_2^2) / 2m \quad (9)$$

Отдельные составляющие работы этих сил:

$$\frac{I_1^2}{2m} = \frac{I_k^2}{2m} = \frac{(kQq)^2}{4\Delta F r_0 r_1^2} \left[\frac{r_1}{r_0} - 1 + \frac{1}{2} p \ln \frac{1+p}{1-p} + \frac{r_0}{16r_1} \left(\ln \frac{1+p}{1-p} \right)^2 \right];$$

$$p = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}.$$

$$\frac{I_2^2}{2m} = \Delta F (r_1 - r_0); \quad \frac{I_2 I_1}{m} = \frac{kQqm}{r_1} \left[\frac{r_1}{r_0} - 1 + \frac{1}{4} p \ln \frac{1+p}{1-p} \right]$$

Работа A_+ имеет минимум, соответствующий значению силы:

$$\Delta F_* = \frac{kQq}{2r_1r_0} \left[1 + \frac{r_0}{r_1p} \ln \frac{1+p}{1-p} + \frac{r_0^2}{16r_1^2p^2} \left(\ln \frac{1+p}{1-p} \right) \right] \quad (10)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим взаимодействие двух точечных зарядов (электронов):
 $q = Q = -1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг; $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл²;
 $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м; $r_1 = 1 \cdot 10^{-10}$ м.

При свободном движении от r_0 до r_1 работа, определяемая выражением (4), будет равна $A_0 = 2,3 \cdot 10^{-18}$ Дж. Сила $F_0 = kq^2/r_0^2 = 0,9216 \cdot 10^{-7}$ Н. Для перемещения заряда в обратном направлении приложим стороннюю силу $F = F_1 + \Delta F$, где $\Delta F = 1 \cdot 10^{-7}$ Н. Работа, совершаемая сторонней силой, будет равна, согласно выражению (9):

$$A_+ = (0,4015 + 3,02 + 5) \cdot 10^{-18} = 8,42 \cdot 10^{-18} \text{ Дж,}$$

что в 3,66 раз больше A_0 . Работа, совершаемая кулоновской силой (8):

$$A_- = -5,402 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Суммарная работа (7) $A_\Sigma = A_- + A_+ = 3,018 \cdot 10^{-18}$ Дж, как и работа A_0 , соответствует кинетической энергии, приобретенной зарядом после перемещения. Найдем

$$dt = \sqrt{rr_1} dr / \sqrt{2b(r_1 - r)}; \quad b = bkQq/m \quad (11)$$

$$V^2 = 2b \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (12)$$

$$t = \frac{r_1 \sqrt{r_1}}{\sqrt{2b}} \left[\sqrt{\frac{r}{r_1}} \sqrt{1 - \frac{r}{r_1}} + \arcsin \sqrt{1 - \frac{r}{r_1}} \right] \quad (13)$$

Импульсы сил при движении заряда q от r_1 к r_0 по модулю следующими выражениями:

$$I_1 = I_K = \sqrt{\frac{2kQqm}{b}} \sqrt{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}; \quad I_2 = \sqrt{2bkQqm} \sqrt{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}} \quad (14)$$

Работа сторонней силы:

$$A_+ = \frac{I_1^2}{2m} + \frac{I_1 I_2}{m} + \frac{I_2^2}{2m} = \left(b + 2 + \frac{1}{b} \right) kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (15)$$

Работа кулоновской силы:

$$A_- = - \left(\frac{I_k^2}{2m} + \frac{I_k I_2}{m} \right) = - \left(2 + \frac{1}{b} \right) kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (16)$$

Выражение (15) имеет минимум при $\beta = 1$ (рис.2):

минимальную работу A_+ , соответствующую силе $\Delta F_* = 0,3527 \cdot 10^{-7}$ Н, по формуле (9) $A_+^{\min} = (1,138 + 3,02 + 1,763) \cdot 10^{-18} = 5,92 \cdot 10^{-18}$ Дж, что в 2,57 раз больше A_0 .

СЛУЧАЙ 2. Сторонняя сила больше кулоновской на некоторый постоянный коэффициент β . Тогда силы, действующие на заряд q , можно записать в виде $F = F_k - F_2 - F_1 = F_k - \beta F_k - F_1$, где $F_1 = \left| F_k \right|$. Под действием силы $F_2 = \beta F_k$ заряд будет совершать ускоренное движение от r_1 к r_0 . При нулевой начальной скорости, решая уравнение движения, последовательно находим:

$$A_{-}^{\min} = 4kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) = 4A_0, \quad (17)$$

что в 4 раза больше работы A_0 при свободном движении заряда (4). При этом работа кулоновской силы $A_{-} = -3A_0$. При $\beta \gg 1$ работа кулоновской силы стремится к минимальной величине, равной $A_{-} = -2A_0$ (рис.3).

СЛУЧАЙ III. Для перемещения заряда q от r_1 к r_0 на него в течение некоторого времени t_* (при перемещении до r_*) действует сила F по схеме, соответствующей случаю II, сообщаящая заряду в точке r_* кинетическую энергию:

$$K_* = \frac{mV_*^2}{2} = kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_*} \right), \quad (18)$$

которая обеспечивает дальнейшее перемещение заряда q по инерции от r_* к r_0 . Если в левую часть равенства (18) подставить квадрат скорости, определяемый выражением (12):

$$V_*^2 = \frac{2bkQq}{m} \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (19)$$

то можно определить искомую координату:

$$r_* = \frac{r_1 r_0 (1 + b)}{br_0 + r_1} \quad (20)$$

и затраченную работу:

$$A_{+}^* = \left(b + 2 + \frac{1}{b} \right) kQq \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Используя данные, приведенные в рассмотренном выше примере, произведем расчет по формулам (18) – (21) для ряда значений β . Результаты сведем в таблицу 1.

Таблица 1.

β	$r \cdot 10^{10}$ [м]	A_{-}^*/A_0	K_*/A_0
1	0,66666	2	0,5
10	0,91666	1,1	0,9106
100	0,990196	1,0099	0,99

Из таблицы видно, что с ростом величины β работа сторонней силы A_{+} , затрачиваемая на возврат заряда q из положения r_1 в начальное положение r_0 , стремится к величине A_0 , определяемой выражением (4) для случая свободного движения заряда q от r_0 к r_1 под действием кулоновской силы. Идеальным вариантом этого случая является действие мгновенной силы, для чего следует

$$A_0 = \frac{mV_1^2}{2} = kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$$

устремит время действия силы $t_* \rightarrow 0$, а величину силы $F \rightarrow \infty$. Тогда получим мгновенную силу в виде $I_0 d(t)$, где $d(t)$ - дельта-функция Дирака [5]. Единичный импульс силы будет равен $I_0 = mV_1$, где V_1 определяется выражением (4) для случая нулевой начальной скорости $V_0 = 0$:

СЛУЧАЙ IV. Рассмотрим перемещение заряда q по дуге S окружности радиуса r_0 . если использовать выражение для работы (4) с использованием потенциала электрического поля $A_S = q(j_b - j_a)$, то формально получим $A_S = 0$, так как $j_a = j_b = j_0$, где a – начальная точка на дуге S , b – конечная точка на той же дуге. Но это неверное заключение, не работа $A_S = 0$, а ЭТА РАБОТА НЕ МОЖЕТ БЫТЬ СОВЕРШЕНА СИЛАМИ ДАННОГО ПОЛЯ. Для перемещения заряда q по дуге окружности необходимо действие двух сторонних сил: удерживающей силы $F_y = -F_k$, которая равна, но противоположно направлена кулоновской силе, и перемещающей силе F_T , направленную по касательной. Работа постоянной перемещающей силы F_T $A_y = F_y^2 t^2 / 2m$, где t – время перемещения. Поскольку силы F_T и F_y

взаимно перпендикулярны, то работы этих сил аддитивны, т.е. суммарная работа $A_\Sigma = A_T + A_y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Иванов Е.М. Работа и энергия в классической механике и I закон термодинамики. // Фундаментальные исследования, №8,2005,с.11.
2. Иванов Е.М. Работа при движении тел с трением. // Фундаментальные исследования, №6,2005,с.10.
3. Иванов Е.М. Определение работы и работа силы трения. // Успехи современного естествознания, №8,23005, с.10.
4. Иванов Е.М. Работа и энергия в классической механике и первый закон термодинамики. Димитровград, ДИГУД УлГТУ, 2005.
5. Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Наука, 1966.

Work of forces in an electric field of a dot (spherical) charge.

E.M. Ivanov

Dimitrovgrad Institute of Technology, Management and Design.

Work of moving of a dot charge q in a field of a dot (spherical) charge Q is considered. In case of charges of one sign the charge q under action of force Кулона F_k will leave from Q .

Work of force $A_0 = kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$, where $r_0 < r_1$. For moving a charge in the opposite

direction work A of foreign force F always is more A_0 . Only in case of action of instant (pulse) foreign force $A \rightarrow A_0$. Work of two foreign forces is necessary for moving a charge on an arch of a circle for a line: holding (numerically equal force Kulona) and moving.