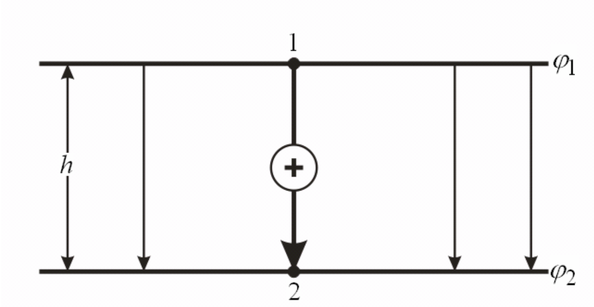
УДК 530.1.076

РАБОТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Иванов Е.М.
Димитровградский институт технологии, управления и дизайна,
Димитровград

Работа перемещения заряда вдоль линии напряженности электростатического поля $A_j = q(j_1 - j_2)$. При перемещении заряда в обратном направлении работа сторонних сил имеет минимум, величина которого зависит от способа приложения сторонней силы.

Рассмотрим движение положительного заряда q в однородном электрическом поле напряженности E плоского конденсатора (рис.1а) в отсутствии сил гравитационного поля.



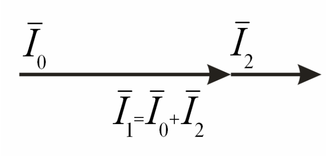


Рисунок 1 (а). Движение положительного заряда q в однородном электрическом поле напряженности E плоского конденсатора.

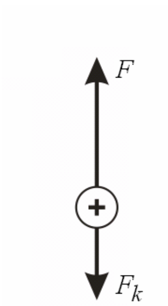
Под действием кулоновской силы $F_k = qE$ движение заряда из точки 1 потенциальной плоскости j_1 в точку 2 потенциальной плоскости j_2 может происходить только вдоль линии напряженности поля (в данном случае вертикальная линия 1-2). Расстояние между плоскостями $h = (j_1 - j_2)/E$. На основании II закона Ньютона: $a = F_k / m = qE/m$; $h = at^2/2 = F_k t^2 / 2m$, где t – время движения заряда. Работу перемещения заряда представим в двух видах:

$$A_j = mah = m\frac{F_k}{m}\frac{F_k t^2}{2m} = \frac{F_k^2 t^2}{2m} \qquad (1)$$

$$A_j = mah = m\frac{qE}{m}\frac{j_1 - j_2}{2m} = q(j_1 - j_2) \qquad (2)$$

Отметим, что для того, чтобы остановить заряд в точке 2, необходимо затратить работу торможения, равную A_j.

Чтобы вернуть заряд q по тому же пути из точки 2 в точку 1, необходимо приложить стороннюю силу F (рис.1б), которую можно представить в виде суммы $F = F_Л + \Delta F$, где $F_Л$ - сила, равная по модулю кулоновской силе $F_Л = F_k = qE$, обеспечивающая равновесие заряда (неподвижность) в электростатическом поле, которую назовем силой левитации.



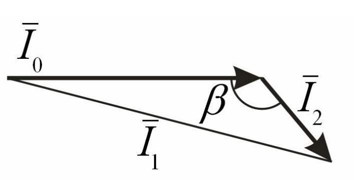


Рисунок 1 (б)

Если $\Delta F = 0$, то перемещение заряда вверх не происходит, поскольку $F_Л = F_k$. Если $\Delta F > 0$, то начинает работать II закон Ньютона: ускорение $a_1 = \Delta F / m$; $h = a_1 t_1^2 / 2 = \Delta F t_1^2 / 2m$. Время движения вверх

$$t_1^2 = \frac{2mh}{\Delta F} = \frac{2m}{\Delta F} \cdot \frac{(j_1 - j_2)}{E} \qquad (3)$$

Запишем баланс импульсов сил:

$$Ft_1 = F_Л t_1 + \Delta F \ t_1 \qquad (4)$$

Возведя в квадрат и разделив на $2m$ обе части равенства, получим баланс энергий (работ):

$$\frac{F^2 t_1^2}{2m} = \frac{F_Л^2 t_1^2}{2m} + \frac{F_Л \Delta F \ t_1^2}{m} + \frac{\Delta F^2 t_1^2}{2m} \qquad (5)$$

Или

$$A_\Sigma = A_Л + A_{Лa} + A_a \qquad (5a)$$

где $A_Л = F_Л^2 t_1^2 / 2m$ – работа силы левитации в статическом состоянии, $A_a = \Delta F^2 t_1^2 / 2m$ - обычная работа силы ΔF, вызывающей ускоренное движение, $A_{Лa} = F_Л \Delta F \ t_1^2 / 2m$ - работа, связанная с ускоренным движением силы левитации, $A_\Sigma = F^2 t_1^2 / 2m$ - суммарная работа сторонней силы F.

Выразим эти работы через работу A_j, определяемую выражением (2).

$$A_a = \frac{\Delta F^2 t_1^2}{2m} = \frac{\Delta F}{2m} \cdot \frac{2m(j_1 - j_2)}{E} = \\ = \Delta F \cdot \frac{q(j_1 - j_2)}{qE} = \frac{\Delta F}{F_k} A_j \qquad (6)$$

$$A_Л = \frac{F_k^2 t_1^2}{2m} = \frac{(qE)^2}{2m} \cdot \frac{2m}{\Delta F} \cdot \frac{(j_1 - j_2)}{E} = \\ = \frac{qE}{\Delta F} A_j = \frac{F_k}{\Delta F} A_j \qquad (7)$$

$$A_Л \cdot A_a = A_j^2 \qquad (8)$$

Таким образом, зависимость между работами $A_Л$ и A_a имеет гиперболический характер.

$$A_{Лa} = \frac{F_Л \cdot \Delta F \cdot t_1^2}{m} = \frac{F_Л}{m} \cdot \frac{2m(j_1 - j_2)}{E} = \\ = \frac{2qE(j_1 - j_2)}{E} = 2A_j \qquad (9)$$

Тогда суммарную работу сторонней силы F можно записать так

$$A_\Sigma = \frac{F_k}{\Delta F} A_j + 2A_j + \frac{\Delta F}{F_k} A_j \qquad (10)$$

Это выражение имеет минимум в случае $\Delta F = F_k = qE$, равный $A_\Sigma^{\min} = 4A_j$. На графике (рис.2) показана зависимость суммарной работы A_Σ от соотношения $\Delta F / qE$.

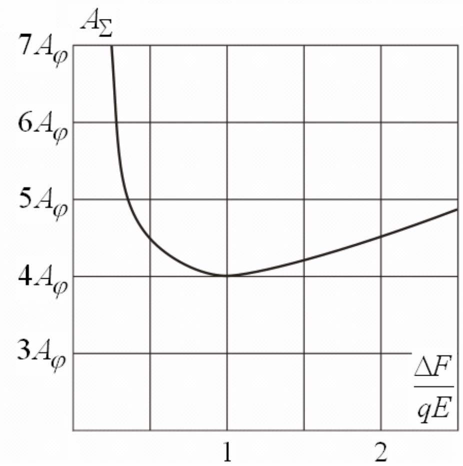


Рисунок 2. Зависимость суммарной работы A_Σ от соотношения $\Delta F / qE$

Из графика видно, что даже в самом благоприятном случае работа подъема заряда сторонней силой в 4 раза больше работы кулоновской силы, совершающей перемещение заряда вниз. Здесь необходимо отметить следующее: кулоновская сила препятствует перемещению заряда вверх, т.е. совершает отрицательную работу, но по модулю она не равна $A_j = q(j_1 - j_2)$, поскольку движение происходит под действием силы ΔF в течение времени t_1, которое связано с временем t формулы (1) соотношением: $F_k t^2 = \Delta F t_1^2$. Тогда работа кулоновской силы будет равна

$$A_k = -\frac{F_k^2 t_1^2}{2m} - \frac{\Delta F \cdot F_k t_1^2}{m} = = -\frac{F_k}{\Delta F} A_j - 2A_j \tag{11}$$

Рассмотрим другой вариант перемещения заряда из точки 2 в точку 1 за счет действия МГНОВЕННОЙ СИЛЫ [1,2,3] в виде $I_0 d(t)$, где $d(t)$ – d-функция Дирака. Величину I_0 будем называть единичным импульсом силы. Тогда дифференциальное уравнение движения заряда запишется в виде:

$$I_0 d(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + qEH(t) \tag{12}$$

при нулевых начальных условиях: $x(0_-) = 0$ и $\frac{dx}{dt}(0_-) = 0$. $H(t)$ - единичная (ступенчатая) функция Хевисайда, причем $d(t) = H'(t)$ [1,4]. Для решения задачи используем преобразование Лапласа [4]. Получаем:

$$x(t) = \frac{I_0}{m}\cdot t - \frac{qE}{m}\cdot\frac{t_2}{2};$$

$$V(t) = \frac{I_0}{m}\cdot H(t) - \frac{qE}{m}\cdot t \tag{13}$$

Определим работу, совершаемую при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_0^h F dx = = \int_0^{t_*}[I_0 d(t) - F_k H(t)][\frac{I_0}{m}dt - \frac{F_k}{m}tdt] \tag{14}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$A = \frac{I_0^2}{m} - \frac{I_0 F_k t_*}{m} + \frac{F_k^2 t_*^2}{2m};$$

$$F_k = qE \tag{15}$$

Под действием мгновенного импульса силы заряд приобретает скорость V_0, направленную вверх, а под действием кулоновской силы возникает тормозящее ускорение: $a = F_k / m$. Время движения заряда $t_* = I_0 / F_k$ или $t_* = V_0 / a = 2h / V_0 = \sqrt{2h/a}$. Оно равно времени t формулы (1).

$$t_* = \sqrt{\frac{2m(j_1 - j_2)}{qE^2}} = \sqrt{\frac{2mA_j}{F_k^2}} \tag{16}$$

Энергия, приобретенная зарядом от единичного импульса силы $A_0 = I_0^2 / m = 2A_j$, а остальные члены уравнения (15) можно представить в виде:

$$-\frac{I_0 F_k t_*}{m} = -2A_j;$$

$$\frac{F_k^2 t_*^2}{2m} = A_j$$

Последний член представляет собой повышение потенциальной энергии при перемещении заряда из точки 2 в точку 1. Таким образом, при движении заряда за счет действия МГНОВЕННОЙ СИЛЫ, заряд должен получить извне начальную энергию A_0, равную $2A_j$.

Рассмотрим третий вариант перемещения заряда из 2 в 1. На заряд действует сторонняя сила, равная кулоновской, но направленная в противоположную сторону (сила левитации): $F_Л = F_k = qE$, а для перемещения заряда вверх ему сообщается единичный импульс силы $I_1 = mV_1$ за счет действия мгновенной силы $I_1 d(t)$. Дифференциальное уравнение движения примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + F_k H(t) = I_1 d(t) + F_Л H(t) \tag{17}$$

при нулевых начальных условиях. Решая уравнение с помощью преобразования Лапласа и вычисляя работу, получим:

Положительная работа:

$$A_+ = \frac{I_1^2}{m} + \frac{I_1 F_Л t}{m} + \frac{F_Л^2 t^2}{2m} \tag{18}$$

Отрицательная работа (противодействующая перемещению заряда):

$$A_- = -\frac{I_1 F_k t}{m} - \frac{F_k F_Л t^2}{2m} \tag{19}$$

Время движения заряда $t_2 = h / V_1 = (j_1 - j_2) / EV_1$. В окончательном виде положительная работа (при $t = t_2$):

$$A_\Sigma = A_+^* = 2K_1 + A_j + \frac{A_j^2}{4K_1};$$

$$K_1 = \frac{I_1^2}{2m} = \frac{mV_1^2}{2} \qquad (20)$$

Это выражение имеет минимум, равный $A_\Sigma^{\min} = (1+\sqrt{2})A_j$ при значении $2K_1 = A_j / \sqrt{2}$. На графике (рис.3) показана зависимость суммарной положительной работы A_Σ, выраженной в долях работы A_j, от величины отношения $2K_1 / A_j$.

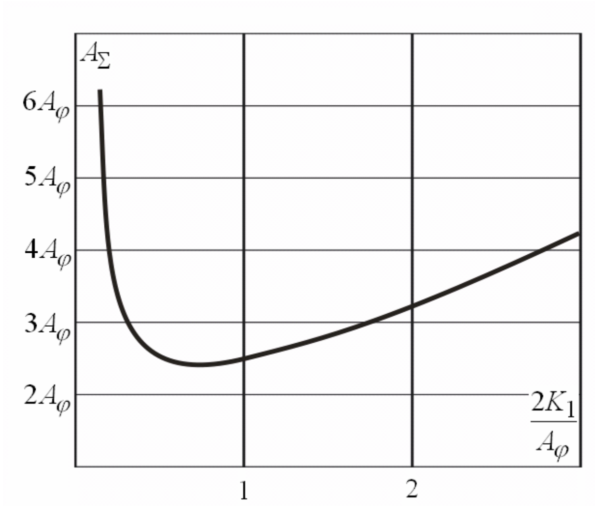


Рисунок 3. Зависимость суммарной положительной работы A_Σ, выраженной в долях работы A_j, от величины отношения $2K_1 / A_j$.

Отрицательная работа в окончательном виде (при $t = t_2$):

$$A_-^* = -A_j - \frac{A_j^2}{4K_1} \qquad (21)$$

Как следует из графика (рис.4) отрицательная работа (работа кулоновской силы) не является постоянной величиной. Ее можно вычислять по формуле (2) только в том случае, если она является единственной движущей (или тормозящей) силой. Когда же кулоновская сила «соучаствует» со сторонними силами в перемещении заряда, то изменяется время движения заряда и расчет работы кулоновской силы надо проводить с учетом ее взаимодействия с другими силами. При очень большом начальном импульсе ($K_1 >> A_j$) выражение (21) асимптотически стремится к обычному значению работы кулоновской силы: $A_-^* = -A_j$.

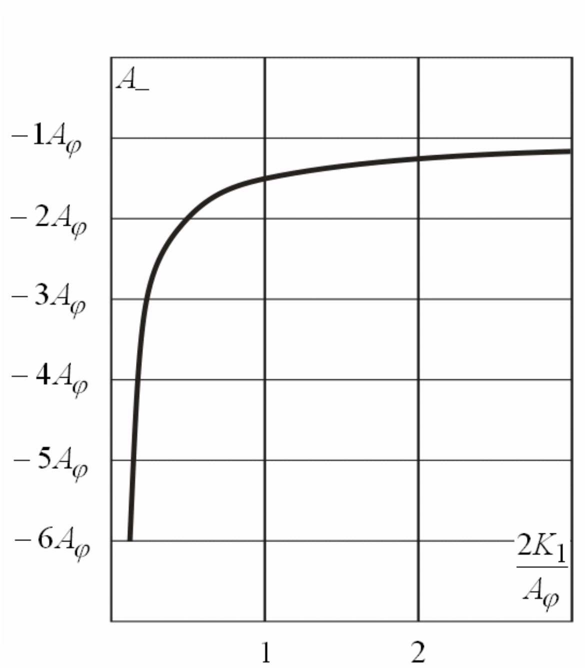


Рисунок 4. Работа кулоновской силы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. - М.: Атомиздат, 1970.
2. Иванов Е.М. Дополнительные главы классической механики. - Димитровград: ДИТУД УлГТУ, 2004.
3. Иванов Е.М. Работа центростремительных и гироскопических сил //Успехи современного естествознания - №9. - 2004.
4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1971.

THE WORK OF CHARGE TRANSFERENCE IN THE ELECTROSTATIC FIELD

Ivanov E.M.

Dimitrovgrad institute of technology, management and design, Dimitrovgrad

The work of charge transference along the line of tension in the electrostatic field $A_j = q(j_1 - j_2)$. When the charge transference proceeds in backwards, the work of powers has the minimum, which quantity depends on the way (method) of not electric power action.