УДК 530.1.076

РАБОТА ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ С ТРЕНИЕМ

Иванов Е.М.

Димитровградский институт технологии, управления и дизайна, Димитровград

Показано, что при действии на тело массы m силы F под любым углом при наличии трения и без него, будет совершена одна и та же работа $A = F^2 t^2 /(2m)$.

Если на тело массы m, находящегося на гладкой горизонтальной поверхности, действует постоянная сила F, направленная под некоторым углом a к горизонту и при этом тело перемещается на некоторое расстояние S, то говорят, что сила F совершила работу A. Величину работы определяют по формуле [1,2,3]:

$$A = F \cdot S \cos a \qquad (1)$$

Однако в природе идеально гладких поверхностей не бывает, и на поверхности контакта двух тел всегда возникают силы трения. Вот как об этом пишется в учебнике [1, Стр. 200]: «Работа силы трения покоя равна нулю, поскольку перемещение отсутствует. При скольжении твердых поверхностей сила трения направлена против перемещения. Ее работа отрицательна. Вследствие этого кинетическая энергия трущихся тел превращается во внутреннюю – трущиеся поверхности нагреваются».

Автором данной статьи было просмотрено множество школьных и вузовских учебников и задачников, но работа против сил трения рассматривалась только применительно к равномерному движению:

$$A_{TP} = F_{TP} \cdot S = mNS \qquad (2)$$

где m - коэффициент трения скольжения.

Только в учебнике О.Д. Хвольсона [3, стр. 92] рассмотрен случай УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ при наличии сил трения: «Итак, следует отличать два случая производства работы: в первом сущность работы заключается в преодолевании внешнего сопротивления движению, которое совершается без увеличения скорости движения тела; во втором – работа обнаруживается увеличением скорости движения, к которому внешний мир относится индифферентно.

На деле мы обыкновенно имеем СОЕДИНЕНИЕ ОБОИХ СЛУЧАЕВ: сила f преодолевает какие-либо сопротивления и в то же время меняет скорость движения тела.

Положим, что f' не равно f, а именно, что $f' < f$. В таком случае на тело действует сила $f - f'$, работа r которой вызывает увеличение скорости тела. Мы имеем $r = (f - f')S$, откуда

$$fS = f'S + r \qquad (*)$$

Работа $r = fS$ состоит из двух частей: $f'S$ тратится на преодолевание внешнего сопротивления, r на увеличение скорости тела».

Представим это в современной интерпретации (рис. 1). На тело массы m действует сила тяги F_T, которая больше силы трения $F_{TP} = mN = mmg$. Работу силы тяги в соответствии с формулой (*) можно записать так

$$A = F_T S = F_{TP} S + F_a S = A_{TP} + A_a \qquad (3)$$

где $F_a = F_T - F_{TP}$ - сила, вызывающая ускоренное движение тела в соответствии со II законом Ньютона: $F_a = ma$. Работа силы трения отрицательна, но здесь и далее мы будем использовать силу трения и работу трения по модулю. Для дальнейших рассуждений необходим численный анализ. Примем следующие данные: $m = 10$ кг; $g = 10$ м/с^2; $F_T = 100$ Н; $m = 0,5$; $t = 10$ с. Проводим следующие вычисления: $F_{TP} = mmg = 50$ Н; $F_a = 50$ Н; $a = F_a / m = 5$ м/с^2; $V = at = 50$ м/с; $K = mV^2/2 = 12,5$ кДж; $S = at^2/2 = 250$ м; $A_a = F_a S = 12,5$ кДж; $A_{TP} = F_{TP} S = 12,5$ кДж. Таким образом суммарная работа $A = A_{TP} + A_a = 12,5 + 12,5 = 25$ кДж

А теперь рассчитаем работу силы тяги F_T для случая, когда трение отсутствует ($m = 0$).

Проводя аналогичные вычисления, получаем: $a = 10$ м/с^2; $V = 100$ м/с; $K = 50$ кДж; $S = 500$ м; $A = 50$ кДж. В последнем случае за те же 10 с мы получили работу в два раза больше. Могут возразить, что и путь в два раза больше. Однако, что бы ни говорили, получается парадоксальная ситуация: мощности, развиваемой одной и той же силой, отличаются в два раза, хотя импульсы сил одинаковы $I = F_T t = 1$ кН·с. Как писал М.В. Ломоносов еще в 1748 г.: «…но все изменения, совершающиеся в природе, происходят таким образом, что сколько к чему прибавилось столько же отнимется у другого…». Поэтому попробуем получить другое выражение для определения работы.

Запишем II закон Ньютона в дифференциальной форме:

$$F \cdot dt = d(mV) \qquad (4)$$

и рассмотрим задачу о разгоне первоначально неподвижного тела (трение отсутствует). Интегрируя (4), получим: $F \cdot t = mV$. Возведя в квадрат и разделив на $2m$ обе части равенства, получим:

$$\frac{F^2t^2}{2m} = \frac{mV^2}{2} \quad \text{или} \quad A = K \qquad (5)$$

Таким образом, получили другое выражение для вычисления работы

$$A = \frac{F^2t^2}{2m} = \frac{I^2}{2m} \qquad (6)$$

где $I = F \cdot t$ - импульс силы. Это выражение не связано с путем S, пройденным телом за время t, т.е. оно может быть использовано для вычисления работы, совершаемой импульсом силы и в том случае, если тело остается неподвижным, хотя, как утверждают во всех курсах физики, в этом случае никакой работы не совершается.

Переходя к нашей задаче об ускоренном движении с трением, запишем сумму импульсов сил: $I_T = I_a + I_{TP}$, где $I_T = F_T t$; $I_a = F_a t$; $I_{TP} = F_{TP} t$. Возведя в квадрат сумму импульсов, получим:

$$F_T^2 t^2 = F_a^2 t^2 + 2F_a F_{TP} t^2 + F_{TP}^2 t^2$$

Разделив все члены равенства на $2m$, получим:

$$\frac{F_T^2 t^2}{2m} = \frac{F_a^2 t^2}{2m} + \frac{F_a F_{TP} t^2}{m} + \frac{F_{TP}^2 t^2}{2m} \qquad (7)$$

или

$$A = A_a + A_{УТ} + A_{TP}$$

где $A_a = F_a^2 t^2 / 2m$ – работа, затрачиваемая на ускорение; $A_{TP} = F_{TP}^2 t^2 / 2m$ - работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при равномерном движении, а $A_{УТ} = F_a F_{TP} t^2 / m$ – работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при ускоренном движении. Численный расчет дает следующий результат: $A = A_a + A_{УТ} + A_{TP} = 12{,}5 + 25 + 12{,}5 = 50$ кДж, т.е. мы получили ту же самую величину работы, которую совершает сила F_T при отсутствии трения.

Рассмотрим более общий случай движения тела с трением, когда на тело действует сила F, направленная под углом a к горизонту (рис. 2). Теперь сила тяги $F_T = F\cos a$, а силу $F_Л = F\sin a$ - назовем силой левитации, она уменьшает силу тяжести $P = mg$, а в случае $F_Л = mg$ тело не будет оказывать давления на опору, будет находиться в квазиневесомом состоянии (состоянии левитации). Сила трения $F_{TP} = mN = m(P - F_Л)$. Силу тяги можно записать в виде $F_T = F_a + F_{TP}$, а из прямоугольного треугольника (рис. 2) получим: $F^2 = F_T^2 + F_Л^2$. Умножая последнее соотношение на t^2, получим баланс импульсов сил, а разделив на $2m$, получим баланс энергий (работ):

$$\frac{F^2t^2}{2m} = \frac{(1+m^2)F_Л^2 t^2}{2m} + \frac{F_a^2 t^2}{2m} - \frac{2mF_Л F_a t^2}{2m} - m^2 F_Л g t^2 + mgF_a t^2 + \frac{1}{2}m^2 mg^2 t^2 \qquad (8)$$

Приведем численный расчет для силы $F = 100$ Н и $a = 30^o$ при тех же условиях ($m = 10$ кг; $m = 0{,}5$; $t = 10$ с.). Работа силы F будет равна $A = F^2t^2 / 2m = 50$, а формула (8) дает следующий результат (с точностью до третьего знака после запятой):
50=15,625+18,974-15,4-12,5+30,8+12,5 кДж.

Как показывают расчеты, сила $F = 100$ Н, действуя на тело массы $m = 10$ кг под любым углом a за 10 с совершает одну и ту же работу 50 кДж.

Последний член в формуле (8) представляет собой работу силы трения при равномерном движении тела по горизонтальной поверхности со скоростью V

$$A_{TP} = \frac{F_{TP}^2 t^2}{2m} = \frac{F_{TP}^2 S^2}{2mV^2} = \frac{(F_{TP} S)^2}{4K} = \frac{1}{2} m^2 m g^2 t^2 \quad (9)$$

Таким образом, под каким бы углом не действовала данная сила F на данное тело массы m, при наличии трения или без него, за время t будет совершена одна и та же работа (даже если тело неподвижно):

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} \quad (10)$$

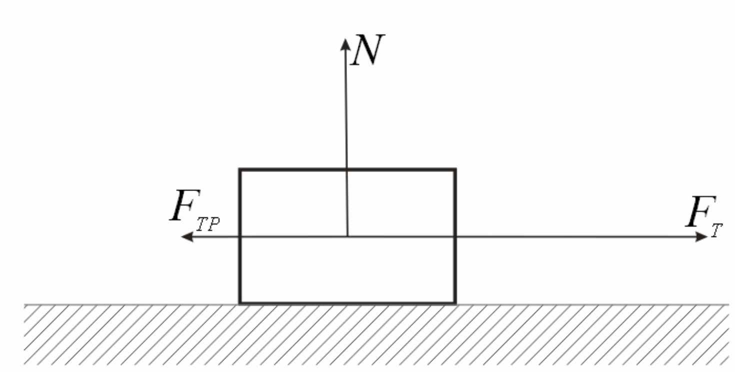

Рисунок 1.

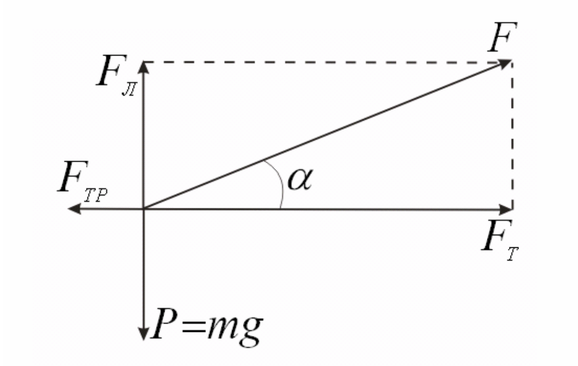

Рисунок 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев А.Н. механика и теория относительности. Учеб.пособие для физ.спец.вузов. – М.: Высш.шк., 1986.
2. Стрелков С.П. Механика. Общий курс физики. Т. 1. – М.: ГИТТЛ, 1956.
3. Хвольсон О.Д. Курс физики. Т. 1. РСФСР Госуд.Изд-во, Берлин, 1923.

THE WORK WHEN THE BODY MOVES WITH FRICTION

Ivanov E.M.
Dimitrovgrad Institute of technology, management and design, Dimitrovgrad

We demonstrate, that when the (mass *m*) with power *F* has an effect on pepy body at any angle with friction or without friction the work will be the same: $A = (F \cdot t)^2 / 2m$.