

УДК 517.518.87

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ЕСТЕСТВЕННОЙ НОРМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Корытов И.В.

*Восточно-Сибирский государственный технологический университет,
Улан-Удэ-17*

В статье дается обоснование правомерности применения оценок фундаментального решения известного дифференциального оператора к фундаментальному решению оператора, порожденного естественным способом нормирования пространств Соболева. Необходимость использования таких оценок возникает в теории кубатурных формул при нахождении норм функционалов погрешности.

Целью работы является обоснование правомерности применения верхних оценок фундаментального решения известного оператора к фундаментальному решению оператора, порожденного естественной нормировкой пространств Соболева.

1. Естественная норма в пространстве Соболева. Объектом нашего внимания будут пространства Соболева $W_p^{(m)}(R_n)$, состоящие из функций, заданных на множестве R_n , и $\tilde{W}_p^{(m)}(Q)$, состоящие из периодических функций с единичной матрицей периодов. В последнем случае в качестве фундаментальной области выступает единичный куб с отождествленными противоположными гранями $Q = \{x \in R_n : 0 \leq x < 1, j = 1, \mathbf{K}, n\}$. Норма в этих пространствах будет задана в виде

$$\|j(x)\|_{W_p^{(m)}(R_n)} = \left(\int_{R_n} \sum_{|a| \leq m} \frac{|a|!}{a!} |D^a j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

$$\|j(x)\|_{\tilde{W}_p^{(m)}(Q)} = \left(\int_Q \sum_{|a| \leq m} \frac{|a|!}{a!} |D^a j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

в обеих формулах $1 < p < \infty$. Предельные значения показателя суммируемости индуцируют новые пространства. При $p=1$ выражения (1) и (2) изменятся очевидным образом

$$\|j(x)\|_{W_1^{(m)}(R_n)} = \int_{R_n} \sum_{|a| \leq m} \frac{|a|!}{a!} |D^a j(x)| dx, \quad (3)$$

$$\|j(x)\|_{\tilde{W}_1^{(m)}(Q)} = \int_Q \sum_{|a| \leq m} \frac{|a|!}{a!} |D^a j(x)| dx, \quad (4)$$

В эти пространства объединяются функции, обобщенные частные производные которых суммируемы в R_n или в Q .

Выписывание естественных норм в $W_\infty^{(m)}(R_n)$ и $\tilde{W}_\infty^{(m)}(Q)$ предварит следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого конечного числа измеримых существенно ограниченных в совокупности на R_n функций f_k , таких, что $|f_k|^p$ суммируемы при всех достаточно больших p и

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

выполняется равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \text{vraisup}_{k; x \in R_n} |f_k|. \quad (5)$$

Замечание. Условие существования конечного предела при $p \rightarrow \infty$ в случае интегрирования по R_n или любой неограниченной области $\Omega \subset R_n$ предполагает исключение из рассматриваемого класса таких функций, как $f(x) \equiv c$, $c = \text{const}$ и других, для которых несобственный интеграл расходится. Если же интегрирование происходит по ограниченной области $\Omega \subset R_n$, то для таких функций утверждение теоремы остается справедливым.

Доказательство теоремы 1. Здесь будет использована идея из [1], примененная там для вывода нормы функции в пространстве $L_\infty(\Omega)$. С учетом обозначения $M = \text{vraisup}_{k; x \in R_n} |f_k|$ можно по-

строить неравенство

$$\left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R_n} \sum_k M^{\frac{p}{2}} |f_k|^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= M^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = M^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Интеграл справа с показателем $\frac{p}{2}$ мало отличается от интеграла с показателем p при больших значениях этого показателя, а потому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{2}} \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

откуда следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M. \quad (8)$$

По определению существенного максимума как верхней грани числового множества для любого положительного ϵ , не превосходящего M , существуют значения f_k , удовлетворяющие неравенству $|f_k| > M - \epsilon \quad \forall k$, причем для выполнения последнего необходимо существование ограниченного множества $G \subset R_n$ ненулевой меры, в каждой точке которого определены указанные значения. Так как $\text{mes} G < \text{mes} R_n$, можно записать обратное неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_G \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_G \sum_k (M - \epsilon)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left((M - \epsilon)^p \sum_k \int_G dx \right)^{\frac{1}{p}} = (M - \epsilon) (k \text{mes} G)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Операция взятия нижнего предела приводит к неравенству

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{R_n} \sum_k |f_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq M - \epsilon. \quad (10)$$

С учетом произвольности ϵ из (8) и (10) следует утверждение теоремы.

Таким образом, для (1) и (2) предельными при $p \rightarrow \infty$ будут нормы

$$\|j(x)\|_{W_\infty^{(m)}(R_n)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|j(x)\|_{W_p^{(m)}(R_n)} = \text{vraisup}_{x \in R_n, |a| \leq m} |D^a j(x)|, \quad (11)$$

$$\|j(x)\|_{\tilde{W}_\infty^{(m)}(Q)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|j(x)\|_{\tilde{W}_p^{(m)}(Q)} = \text{vraisup}_{x \in Q, |a| \leq m} |D^a j(x)|. \quad (12)$$

Эти пространства будут включать в себя функции, существенно ограниченные в R_n или, соответственно, в Q со своими обобщенными частными производными.

Поскольку излагаемые факты нацелены на применение в области кубатурных формул, то следует оговорить условие, при котором они имеют смысл. Кубатурная сумма, приближаю-

щая интеграл, представляет собой с точки зрения функционала линейную комбинацию дельта-функций $d(x)$, которые имеют смысл при воздействии на непрерывные пробные функции, отсюда требование вложения основного пространства в пространство непрерывных функций $W_p^{(m)} \subset C$, что выражается неравенством $mp > n$ (n – размерность R_n) [2].

2. Фундаментальное решение вспомогательного оператора. В качестве такового будет использован оператор

$$(1 - \Delta)^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|a|=k} \frac{k!}{a!} D^{2a}, \quad (14)$$

порожденный нормой, введенной в [3]

$$\|j(x)\|_{W_p^{(m)}(R_n)} = \left(\int_{R_n} |(1 - \Delta)^{\frac{m}{2}} j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty. \quad (15)$$

В этих двух формулах Δ – оператор Лапласа.

Не приводя вида фундаментального решения $G(|x|)$ оператора (14) и его оценок по множествам $|x| < 1$ и $|x| > 1$, укажем источник их получения [1]. Оценки производных $D^a G(|x|)$ послужат основой доказательства всех наших утверждений. В теоремах 2–4 фигурируют функции, заданные на всем R_n .

Теорема 2. Фундаментальное решение $G(|x|)$ оператора (14) принадлежит пространству $W_p^{(m)}(R_n)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $pm > n$.

Доказательство. Для начала потребуется рассмотрение $L_{p'}$ -норм производных $D^a G(|x|)$ при $1 < p < \infty$

$$\|D^a G(|x|)\|_{L_{p'}} = \left(\int_{R_n} |D^a G(|x|)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (16)$$

Интеграл из (16) удобнее разбить на сумму

$$\begin{aligned} \int_{R_n} |D^a G(|x|)|^{p'} dx &= \int_{|x| < 1} |D^a G(|x|)|^{p'} dx + \\ &+ \int_{|x| > 1} |D^a G(|x|)|^{p'} dx = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (17)$$

после чего оценить каждое из слагаемых

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x| < 1} |D^a G(|x|)|^{p'} dx \leq C_1 \int_{|x| < 1} \left| \frac{1}{|x|^{n-2m+|a|}} \right|^{p'} dx = \\ &= C_1 \int_{|x| < 1} \left| \frac{1}{|x|^{(n-2m+|a|)p'}} \right| dx = C_2 \int_0^1 r^{n-1-(n-2m+|a|)p'} dr, \end{aligned} \quad (18)$$

$$I_2 = \int_{|x|>1} |D^a G(|x|)|^{p'} dx \leq C_3 \int_{|x|>1} \left| \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}} \right|^{p'} dx. \quad (19)$$

В последнем равенстве (18) совершен переход к сферическим координатам. Максимально возможный порядок производной равен m , а потому

$$I_1 \leq C_2 \int_0^1 r^{n-1-(n-m)p'} dr. \quad (20)$$

Интеграл справа существует, если $(n-m)p' < n$, т.е.

$$(n-m)\frac{p}{p-1} < n \Leftrightarrow np - mp < n \quad (21)$$

$$< np - n \Leftrightarrow -mp < -n \Leftrightarrow mp > n.$$

Сходимость несобственного интеграла в правой части (19) очевидна. Из (19), (20), (21) следует, что при $mp > n$ $D^a G(|x|) \in L_{p'}$, $|a| \leq m$, т.е. $G(|x|) \in W_p^{(m)}(R_n)$, $1 < p < \infty$. Что касается предельных значений, то если $p = \infty$, $p' = 1$, тогда неравенства (18) и (19) выполняются. Если же $p = 1$, $p' = \infty$, то требуется доказать существенную ограниченность $D^a G(|x|)$, $|a| \leq m$ на R_n . При любом $a = (a_1, \mathbf{K}, a_n)$ выполняются неравенства

$$D^a G(|x|) \leq C, \quad |x| < 1, \quad \text{если} \quad -n + 2m - |a| > 0, \quad (22)$$

в том числе и при $|a| = m$: $-n + 2m - m > 0 \Leftrightarrow m > n$, а также

$$D^a G(|x|) \leq \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-2m+1)/2}}, \quad |x| > 1. \quad (23)$$

Правая часть (23) имеет глобальный максимум в тех точках, где $|x| = m - \frac{n+1}{2}$, а следовательно, $D^a G(|x|)$ – ограничена. Теорема доказана.

3. Фундаментальное решение оператора, порожденного естественной нормой. Норма (1) порождает оператор

$$\sum_{|a| \leq m} (-1)^{|a|} \frac{|a|!}{a!} D^{2a} = \sum_{|a| \leq m} (-1)^{|a|} \Delta^{|a|}, \quad (24)$$

где Δ – оператор Лапласа. Фундаментальное решение его $E(|x|)$ как обобщенную функцию, действующую на основные функции из $W_p^{(m)}(R_n)$ $1 < p < \infty$, можно получить в виде несобственного интеграла, если применить к уравнению

$$\sum_{|a| \leq m} (-1)^{|a|} \frac{|a|!}{a!} D^{2a} E(|x|) = d(x) \quad (25)$$

прямое и обратное преобразования Фурье

$$E(|x|) = F^{-1} \left[\frac{1}{\sum_{|a|=0}^m |2px|^{2|a|}} \right] = \int_{R_n} \frac{e^{-2pix}}{\sum_{|a|=0}^m |2px|^{2|a|}} dx. \quad (26)$$

$$\text{Здесь } \sum_{|a|=0}^m |2px|^{2|a|} = \sum_{|a| \leq m} (-1)^{|a|} \frac{|a|!}{a!} (-2pix)^{2a}$$

$$\text{Теорема 3. Функция } l(|x|) = \frac{(1+|x|^2)^m}{\sum_{|a|=0}^m |x|^{2|a|}},$$

$x \in R_n$, является множителем Марцинкевича при $1 < p < \infty$.

Доказательство. Как функция n действительных переменных $l(|x|)$, где $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$,

является отношением многочленов равных степеней. Знаменатель ее не имеет действительных корней, и потому $l(|x|)$ непрерывна на R_n . Так как $\lim_{|x| \rightarrow \infty} l(|x|) = 1$, то $l(|x|)$ ограничена. Произ-

водные $D^k l(|x|)$, где $k = (k_1, \mathbf{K}, k_n)$ ($k_j = 0, 1; j = 1, \mathbf{K}, n$) также непрерывны и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k D^k l(|x|) = 1$, откуда следует ограничен-

ность произведения, стоящего под знаком предела. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.5.4 [1], что доказывает наше утверждение.

Теорема 4. Оценки для $D^a G(|x|)$ справедливы и для $D^a E(|x|)$, $|a| \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство. Согласно определению [1], если l – множитель Марцинкевича, то при $1 < p < \infty$ выполняется неравенство

$$\|F^{-1}[lF[G]]\|_{L_p(R_n)} \leq c_p \|G\|_{L_{p'}(R_n)}, \quad (27)$$

где $p' = (p-1)/p$, c_p – константа, зависящая от p' . Функции $E(|x|)$ и $G(|x|)$ связаны выражением

$$\begin{aligned}
 E(|x|) &= F^{-1} \left[\frac{1}{\sum_{|a|=0}^m |2px|^{2|a|}} \right] = \\
 &= F^{-1} \left[\frac{(1+|2px|^2)^m}{\sum_{|a|=0}^m |2px|^{2|a|}} \cdot \frac{1}{(1+|2px|^2)^m} \right] = \\
 &= F^{-1} [l(2px)] F[G] = F^{-1} [l] * G(|x|). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство на основании теоремы 3 вытекает из свойств множителя Марцинкевича [1]. Поскольку по правилу дифференцирования свертки $D^a E = F^{-1} [l] * D^a G$, $|a| \leq m$, то

$$\begin{aligned}
 \|D^a E\|_{L_{p'}} &= \|F^{-1} [l F[D^a G]]\|_{L_{p'}} \leq \\
 &\leq c_{p'} \|D^a G\|_{L_p}, \quad |a| \leq m.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Интеграл справа, определяющий норму, существует при $pm > n$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы для $1 < p < \infty$. Однако, тот же интеграл существует и при $p = \infty$. Достаточно применить предельный пе-

реход к неравенствам (18) и (19), оценивающим его. Здесь, кроме того, отпадает необходимость в ограничениях на m и n . В случае же $p = 1$ существенная ограниченность $D^a E(|x|)$ следует из существенной ограниченности $D^a G(|x|)$, $|a| \leq m$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 непосредственно следует принадлежность фундаментального решения $E(|x|)$ оператора, порожденного естественной нормой, пространству $W_{p'}^{(m)}(R_n)$ в условиях теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
3. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис. ... докт. физ.-мат. наук (01.01.01, 01.01.07) / Вост.-Сиб. технол. ин-т. – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.

FUNDAMENTAL DECISION OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR, GENERATED BY NATURAL RATE IN SPACE SOBOLEVA

Korytov I.V.

The asymptotical estimates of fundamental decision of the well known differential operator may be applied to those of operator generated by natural normalization of the Sobolev spaces. Necessity of using such estimates arises in the theory of multidimensional quadrature formulae, particularly in investigating norms of error functionals.